TERMINALE / EXERCICES CORRIGÉS

Suites et raisonnement par récurrence

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Montrer qu'une suite est minorée

●○○ Application

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

Indice

Dans l'hérédité, pars de $u_k \geq 2$ et refais les opérations de la formule : $\times \frac{1}{3}$, puis $+2$.

Initialisation

$u_0 = 2$ et $2 \geq 2$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

On suppose que $u_k \geq 2$ pour un entier k quelconque. En multipliant par $\frac{1}{3}$, qui est positif : $\frac{1}{3}u_k \geq \frac{2}{3}$. En ajoutant 2 : $u_{k+1} \geq \frac{8}{3}$. Or $\frac{8}{3} \geq 2$, donc $u_{k+1} \geq 2$.

← *on s'est bien servi de l'hypothèse*

Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

Ex. 2 La somme des premiers entiers

●●○ Méthode

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Indice

La somme jusqu'à $k+1$, c'est la somme jusqu'à k, plus $k+1$.

Initialisation

Au rang 1, la somme vaut 1, et $\frac{1\times 2}{2} = 1$. La propriété est vraie au rang 1.

← *la somme commence à 1, on initialise à 1*

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/suites-et-recurrence/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Hérédité

On suppose que $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ pour un entier $k \geq 1$. Alors :

$$1+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

C'est bien la formule au rang $k+1$.

← on factorise par (k + 1)

Conclusion

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Ex. 3 Montrer qu'une suite est croissante ●●○ Type bac

Soit u la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$. Que peut-on en déduire ?

Indice

La propriété à démontrer est $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ ». Il y a donc deux termes à chaque rang.

Initialisation

$u_0=0$ et $u_1=\frac{1}{3}\times 0+2=2$, donc $u_0 \leq u_1$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

On suppose $u_k \leq u_{k+1}$. On multiplie par $\frac{1}{3}$, qui est positif, donc l'ordre ne change pas : $\frac{1}{3}u_k \leq \frac{1}{3}u_{k+1}$. On ajoute 2 : $\frac{1}{3}u_k+2 \leq \frac{1}{3}u_{k+1}+2$, c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.

← à gauche on reconnaît u(k+1), à droite u(k+2)

Conclusion

Par récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n : la suite est croissante.

Ex. 4 Démontrer une formule explicite ●●○ Application

Soit u la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n+1$. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=2^{n+1}-1$.

Indice

Remplace u_k par $2^{k+1}-1$ dans la formule de la suite.

Initialisation

$2^{0+1}-1=2-1=1=u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/suites-et-recurrence/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Hérédité

On suppose $u_k = 2^{k+1} - 1$. Alors

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2\left(2^{k+1} - 1\right) + 1 = 2^{k+2} - 2 + 1 = 2^{k+2} - 1$$

C'est la formule au rang $k+1$.

← 2 × 2^(k+1) = 2^(k+2)

Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Ex. 5 Une divisibilité ●●● Méthode

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Indice

« Divisible par 3 » veut dire « s'écrit $3m$ avec m entier ». Écris $4^{k+1} = 4 \times 4^k$.

Initialisation

$4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, divisible par 3. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

On suppose que $4^k - 1 = 3m$ avec m entier, donc $4^k = 3m + 1$. Alors

$$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$$

et $4m + 1$ est un entier : $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3.

← on fait apparaître l'hypothèse dans le calcul

Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Ex. 6 L'inégalité de Bernoulli ●●● Type bac

Soit a un réel strictement positif. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Indice

Multiplie l'hypothèse par $(1 + a)$, qui est positif, puis développe.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/suites-et-recurrence/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Initialisation

$(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $1 \geq 1$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

On suppose $(1+a)^k \geq 1 + ka$. On multiplie par $1 + a$, qui est positif :

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2$$

Or $ka^2 \geq 0$, donc $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

← on « jette » un terme positif

Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Pour aller plus loin

Comme $1 + na$ tend vers $+\infty$, on en déduira au chapitre suivant que q^n tend vers $+\infty$ quand $q > 1$.

Au bac, sur ce chapitre

2026 **Amérique du Nord jour 2 21 mai 2026** · exercice 2 — Corrigé ↗

2026 **Asie jour 2 10 juin 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

2026 **Antilles, Guyane jour 1 16 juin 2026** · exercice 2 — Corrigé ↗

2026 **Polynésie jour 1 16 juin 2026** · exercice 3 — Corrigé ↗

2026 **Métropole jour 1 16 juin 2026** · exercice 3 — Corrigé ↗

2026 **Métropole jour 1 8 septembre 2026** · exercice 2 — Corrigé ↗

Les 71 sujets qui en parlent

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/suites-et-recurrence/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits