TERMINALE / COURS

Suites et raisonnement par récurrence

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

On étudie la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + 2$$

On calcule les premiers termes : $u_1 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, puis $u_2 = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$ et $u_3 = \frac{80}{27} \approx 2{,}96$.

On dirait que la suite augmente et ne dépasse jamais 3. Mais « on dirait » n'est pas une preuve, et on ne peut pas calculer une infinité de termes. Il faut une méthode qui marche pour tous les n d'un coup : le raisonnement par récurrence.

01 L'idée : les dominos

Imagine une rangée infinie de dominos. Pour être sûr qu'ils tombent tous, il suffit de deux choses :

1. **le premier domino tombe** : c'est l'initialisation ;
2. **chaque domino, en tombant, fait tomber le suivant** : c'est l'hérédité.

Alors le premier fait tomber le deuxième, qui fait tomber le troisième, et ainsi de suite : tous tombent.

01 La méthode en 3 étapes

Raisonnement par récurrence. On veut démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

1. Initialisation. On vérifie que $P(0)$ est vraie.

2. Hérédité. On suppose que $P(k)$ est vraie pour un entier k quelconque : c'est l'hypothèse de récurrence. On démontre qu'alors $P(k+1)$ est vraie.

3. Conclusion. P est vraie au rang 0 et héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Si la suite commence à un autre rang, par exemple $n = 1$, l'initialisation se fait à ce rang-là.

Un exemple rédigé : montrer que $u_n \leq 3$

Initialisation. $u_0 = 2$ et $2 \leq 3$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. On suppose que pour un entier k quelconque, $u_k \leq 3$. On veut montrer que $u_{k+1} \leq 3$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/suites-et-recurrence/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$
\begin{aligned}
u_k &\leq 3 && \text{on suppose} \\
\tfrac{1}{3}u_k &\leq 1 && \times \tfrac{1}{3}\text{, positif : le sens ne change pas} \\
\tfrac{1}{3}u_k + 2 &\leq 3 && +2 \\
u_{k+1} &\leq 3 && \text{c'est la formule de la suite}
\end{aligned}
$$

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$.

On a transformé l'hypothèse pas à pas, jusqu'à faire apparaître la formule de la suite. C'est presque toujours comme ça qu'on fait.

À retenir sur les suites

- Une suite est **croissante** si, pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$. Ça se démontre souvent par récurrence (exercice 3).
- Elle est **majorée par 3** si, pour tout n, $u_n \leq 3$.
- Une suite croissante et majorée **converge**. On verra vers quoi dans le chapitre sur les limites.

Exemple guidé

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montre que $u_n = 2^n - 1$ pour tout entier naturel n.

1. **On écrit la propriété** : $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ ».
2. **Initialisation** : $2^0 - 1 = 0 = u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
3. **Hérédité** : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n. Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
4. **Conclusion** : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

On contrôle sur les premiers termes : $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, et $2^3 - 1 = 7$. La récurrence transforme cette impression en preuve.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/suites-et-recurrence/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits