TERMINALE / COURS

Primitives et équations différentielles

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Jusqu'ici, on partait d'une fonction et on calculait sa dérivée. Maintenant, on fait **le chemin inverse** : on connaît la dérivée, et on cherche la fonction.

Par exemple, la vitesse d'une voiture est $v(t) = 2t$ (en m/s). Quelle distance a-t-elle parcourue au temps t ? Ou encore : une population de bactéries grandit à une vitesse proportionnelle à sa taille. Comment évolue-t-elle ?

01 L'idée : le compteur de vitesse et le point de départ

Tu es passager d'une voiture, les yeux fixés sur le **compteur de vitesse**. À chaque instant, tu connais la vitesse, c'est-à-dire la dérivée de la position. Peux-tu retrouver **où tu es** ?

Presque. Le compteur te dit **comment** tu avances, mais pas **d'où** tu es parti. Deux voitures qui roulent exactement à la même vitesse, l'une partie de Paris, l'autre de Lyon, n'ont pas la même position. Il faut connaître le point de départ.

- Retrouver la position à partir de la vitesse, c'est chercher une primitive.
- Le point de départ, c'est la condition initiale : elle fixe la constante.

01 Les primitives

Définition. Soit f définie sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème. Toute fonction continue sur I admet des primitives. Si F est l'une d'elles, les autres sont les fonctions $F + C$, avec C constante réelle. Il en existe **une seule** qui prend une valeur donnée en un point donné.

Le tableau des primitives

Fonction f	Une primitive F	Sur
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $]0\,;+\infty[$ sinon
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/primitives-et-equations-differentielles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Fonction f	Une primitive F	Sur
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Et pour les formes composées, on relit les dérivées à l'envers :

Forme	Une primitive
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u
$u'\,u^n$ ($n \neq -1$)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$ (avec $u > 0$)	$\ln u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

Exemple : une primitive de $2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est e^{x^2}, car c'est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = x^2$.

Quand il manque un facteur, on l'ajuste : une primitive de e^{3x} est $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$. On vérifie toujours en dérivant.

Les équations différentielles

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une **fonction** y, et qui fait intervenir sa dérivée y'.

$y' = ay$ (a réel non nul). Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$, avec C constante réelle.

$y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec C constante réelle.

$y' = ay + f$**.** Si p est une solution particulière, les solutions sont les fonctions $p + C\,\mathrm{e}^{ax}$.

La fonction constante $-\frac{b}{a}$ est la **solution d'équilibre** : si on part de là, on n'en bouge plus, car sa dérivée est nulle et $a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.

Exemple guidé

Résous l'équation différentielle $y' = -2y + 6$ avec la condition $y(0) = 1$.

1. **La forme** : c'est $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 6$.
2. **La solution constante** : $y = -\frac{b}{a} = 3$. En effet, si $y = 3$, $y' = 0$ et $-2 \times 3 + 6 = 0$.
3. **Toutes les solutions** : $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 3$, avec C réel.
4. **La condition initiale** : $y(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$.
5. La solution est $y(x) = 3 - 2\mathrm{e}^{-2x}$.

On vérifie : $y'(x) = 4\mathrm{e}^{-2x}$ et $-2y + 6 = -6 + 4\mathrm{e}^{-2x} + 6$. Les deux membres sont égaux. La fonction part de 1 et se rapproche de 3 : c'est un café qui se réchauffe jusqu'à la température de la pièce.

Retour au problème

Une population de bactéries $N(t)$ (en milliers) vérifie $N' = 0{,}3\,N$ et $N(0) = 2$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/primitives-et-equations-differentielles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$
\begin{aligned}
N(t) &= C\,\mathrm{e}^{0{,}3t} && \text{solutions de } y' = ay \\
N(0) &= C = 2 && \text{le point de départ} \\
N(t) &&= 2\,\mathrm{e}^{0{,}3t}
\end{aligned}
$$

La population double quand $\mathrm{e}^{0{,}3t} = 2$, soit $t = \frac{\ln 2}{0{,}3} \approx 2{,}3$ heures.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/primitives-et-equations-differentielles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits