TERMINALE / EXERCICES CORRIGÉS

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Espérance et variance d'une somme

●○○ Application

X et Y sont indépendantes, avec $E(X) = 4$, $V(X) = 2$, $E(Y) = -1$, $V(Y) = 3$. Calculer $E(X+Y)$, $V(X+Y)$, $E(3X-2Y)$ et $V(3X-2Y)$.

Indice

Les coefficients sortent au carré dans la variance.

La somme

$E(X+Y) = 4 - 1 = 3$ et, par indépendance, $V(X+Y) = 2 + 3 = 5$.

Espérance de 3X − 2Y

$E(3X-2Y) = 3 \times 4 - 2 \times (-1) = 14$.

Variance de 3X − 2Y

$V(3X-2Y) = 9V(X) + 4V(Y) = 18 + 12 = 30$.

← *(-2)² = 4, les variances s'ajoutent*

Ex. 2 Bienaymé-Tchebychev

●○○ Méthode

Le temps d'attente T (en minutes) à un guichet a pour espérance 12 et pour écart type 3. Minorer la probabilité que le temps d'attente soit strictement compris entre 6 et 18 minutes.

Indice

$6 < T < 18 \iff |T - 12| < 6$.

La variance

$V(T) = 3^2 = 9$.

L'inégalité

$P(|T-12| \geq 6) \leq \frac{9}{36} = 0{,}25$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Conclusion

$P(6 < T < 18) \geq 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Ex. 3 Une moyenne d'échantillon ●●○ Application

On lance 100 fois un dé équilibré. M est la moyenne des résultats.

1. Calculer l'espérance et la variance d'un lancer.
2. En déduire $E(M)$ et $V(M)$.

Indice

$E(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Un lancer

$E(X) = \frac{21}{6} = 3{,}5$ et $V(X) = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$.

La moyenne

$E(M) = 3{,}5$ et $V(M) = \frac{35/12}{100} = \frac{35}{1\,200} \approx 0{,}029$.

← *la variance est divisée par n*

Interprétation

La moyenne de 100 lancers varie beaucoup moins qu'un lancer seul, autour de 3,5.

Ex. 4 Quelle taille d'échantillon ? ●●○ Méthode

Une pièce truquée donne « pile » avec une probabilité p inconnue. On la lance n fois et on note F_n la fréquence de « pile ». On admet que $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$. Combien de lancers faut-il pour que $P(|F_n - p| \geq 0{,}05) \leq 0{,}1$?

Indice

Utilise l'inégalité de concentration avec $V \leq \frac{1}{4}$.

L'inégalité

$P(|F_n - p| \geq 0{,}05) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}05^2} \leq \frac{1}{4n \times 0{,}0025} = \frac{100}{n}$.

La condition

Il suffit que $\frac{100}{n} \leq 0{,}1$, soit $n \geq 1\,000$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Conclusion

1 000 lancers suffisent, quelle que soit la valeur de p.

Ex. 5 Le piège de la variance ●●○ Piège

Un élève dit : « X a une variance de 5. Donc $X + X$ et $2X$ ont la même variance, $5 + 5 = 10$. » A-t-il raison ?

Indice

X et X sont-elles indépendantes ?

L'erreur

L'additivité des variances exige l'indépendance. Or X n'est pas indépendante d'elle-même.

Le bon calcul

$X + X = 2X$, donc $V(2X) = 2^2 \times 5 = 20$.

← *le coefficient sort au carré*

Conclusion

L'élève a tort, la variance vaut 20.

Ex. 6 Contrôle qualité, type bac ●●● Type bac

Une machine remplit des paquets de riz. La masse d'un paquet (en g) est une variable aléatoire d'espérance 1 000 et de variance 25. On prélève un échantillon de n paquets, de masses indépendantes, et on note M_n leur masse moyenne.

1. Donner $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
2. Pour $n = 50$, minorer $P(999 < M_n < 1\,001)$.
3. Déterminer la plus petite taille n telle que $P(|M_n - 1\,000| \geq 1) \leq 0{,}01$.

Indice

Inégalité de concentration avec $\delta = 1$.

Question 1

$E(M_n) = 1\,000$ et $V(M_n) = \frac{25}{n}$.

Question 2

$P(|M_{50} - 1\,000| \geq 1) \leq \frac{25}{50 \times 1^2} = 0{,}5$, donc $P(999 < M_{50} < 1\,001) \geq 0{,}5$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Question 3

Il suffit que $\frac{25}{n} \leq 0{,}01$, soit $n \geq 2\,500$.

← on résout en n

Conclusion

Un échantillon de 2 500 paquets garantit la précision voulue avec l'inégalité de concentration.

Au bac, sur ce chapitre

2026 **Amérique du Nord jour 1 20 mai 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

2026 **Amérique du Nord jour 2 21 mai 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

2026 **Centres étrangers jour 1 10 juin 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

2026 **Antilles, Guyane jour 1 16 juin 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

2026 **Antilles, Guyane jour 2 17 juin 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

2026 **Polynésie jour 2 17 juin 2026** · exercice 1 — Corrigé ↗

Les 28 sujets qui en parlent

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits