TERMINALE / COURS

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Tu lances un dé une fois : tu peux obtenir n'importe quoi entre 1 et 6. Tu le lances 10 000 fois et tu fais la moyenne des résultats : tu obtiendras presque sûrement un nombre très proche de 3,5. Pourquoi ? Et peut-on dire **à quel point** on est sûr d'être proche ?

01 L'idée : la chorale

Dans une chorale, chaque chanteur chante **un peu faux** : un peu trop haut, un peu trop bas, au hasard. Écouté seul, un chanteur s'écarte nettement de la bonne note.

Mais quand 200 chanteurs chantent ensemble, les erreurs vers le haut et vers le bas **se compensent** : l'oreille entend une note très proche de la note juste. Plus la chorale est grande, plus elle sonne juste.

- Chaque chanteur, c'est une variable aléatoire X_i.
- La note juste, c'est l'**espérance** μ.
- Ce qu'on entend, c'est la **moyenne** $M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

La loi des grands nombres dit exactement ça : la moyenne se rapproche de l'espérance quand n grandit.

01 Sommes de variables aléatoires

Pour des variables aléatoires X et Y et des réels a et b :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX+b) = aE(X) + b$ **(toujours)**.
- $V(aX+b) = a^2\,V(X)$.
- Si X et Y sont **indépendantes**, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple : une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes, chacune d'espérance p et de variance $p(1-p)$. On retrouve $E = np$ et $V = np(1-p)$.

Échantillon et moyenne

Un **échantillon** de taille n d'une loi est une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires **indépendantes** qui suivent toutes cette loi, d'espérance μ et de variance V.

Sa somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et sa moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$ vérifient :

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$E(S_n) = n\mu \qquad V(S_n) = nV \qquad E(M_n) = \mu \qquad V(M_n) = \frac{V}{n}$$

La variance de la moyenne est divisée par n : plus la chorale est grande, moins le son global s'écarte de la note juste.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour toute variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, et pour tout réel $\delta > 0$:

$$P\big(|X - \mu| \geq \delta\big) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Elle donne une **majoration** de la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins δ. Elle est souvent grossière, mais elle marche pour **n'importe quelle** loi.

Exemple : X a pour espérance 50 et pour variance 25. Alors $P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{100} = 0{,}25$, donc $P(40 < X < 60) \geq 0{,}75$.

L'inégalité de concentration

En appliquant Bienaymé-Tchebychev à la moyenne M_n d'un échantillon :

$$P\big(|M_n - \mu| \geq \delta\big) \leq \frac{V}{n\,\delta^2}$$

C'est l'outil des exercices du type « quelle taille d'échantillon faut-il pour que… ».

La loi des grands nombres

Pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P\big(|M_n - \mu| \geq \delta\big) = 0$$

Quand la chorale devient immense, la probabilité d'entendre une note éloignée de la note juste devient aussi petite qu'on veut. C'est ce qui justifie qu'on estime une probabilité par une **fréquence** observée sur un très grand nombre d'expériences.

Exemple guidé

Combien de lancers de dé faut-il pour que la moyenne M_n s'écarte de 3,5 d'au moins 0,1 avec une probabilité au plus 0,05 ?

1. **La variance d'un lancer** : $V(X) = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}92$.
2. **L'inégalité de concentration** : $P(|M_n - 3{,}5| \geq 0{,}1) \leq \dfrac{V(X)}{n \times 0{,}1^2}$.
3. **On impose** $\dfrac{35/12}{n \times 0{,}01} \leq 0{,}05$, soit $n \geq \dfrac{35/12}{0{,}0005} \approx 5\,833{,}3$.
4. Avec 5 834 lancers, la garantie est atteinte.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Retour au problème

Pour un dé, $\mu = 3{,}5$ et $V = \frac{35}{12} \approx 2{,}92$. Avec $n = 10\,000$ lancers et $\delta = 0{,}1$:

$$P\big(|M_n - 3{,}5| \geq 0{,}1\big) \leq \frac{35/12}{10\,000 \times 0{,}01} \approx 0{,}029$$

La moyenne est entre 3,4 et 3,6 avec une probabilité d'au moins 97 %.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-des-grands-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits