TERMINALE / COURS

Succession d'épreuves et loi binomiale

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Un basketteur réussit 70 % de ses lancers francs. Il en tente 10. Quelle est la probabilité qu'il en réussisse exactement 7 ? Au moins 8 ? Combien en réussira-t-il en moyenne ?

On pourrait faire un arbre, mais avec 10 lancers il aurait $2^{10} = 1\,024$ branches. Il faut une formule.

01 L'idée : la planche de Galton

Une bille tombe sur une planche hérissée de clous. À chaque clou, elle part **à droite** avec la probabilité p, ou **à gauche** avec la probabilité $1 - p$. Il y a n rangées de clous, et chaque rebond ne dépend pas des précédents.

En bas, la bille tombe dans une case numérotée par **le nombre de fois où elle est partie à droite**. Ce nombre, c'est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

- Chaque clou est une **épreuve de Bernoulli** : deux issues, succès (droite) ou échec (gauche).
- La descente complète est un **schéma de Bernoulli** : n épreuves identiques et indépendantes.
- Pour arriver dans la case k, la bille doit faire k rebonds à droite parmi n : il y a $\binom{n}{k}$ chemins qui y mènent (voir le chapitre Dénombrement).

01 Épreuve et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1 - p$).

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

01 La loi binomiale

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n\,;p)$. Pour tout entier k entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

D'où vient la formule ? Un chemin précis avec k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (on multiplie le long des branches). Et il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type, autant que de façons de placer les k succès parmi les n épreuves.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-binomiale/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Retour au basketteur : $X \sim \mathcal{B}(10\,;0{,}7)$.

$$P(X=7) = \binom{10}{7} \times 0{,}7^7 \times 0{,}3^3 = 120 \times 0{,}7^7 \times 0{,}3^3 \approx 0{,}267$$

Espérance, variance, écart type

Si $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$:

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Le basketteur réussit en moyenne $E(X) = 10 \times 0{,}7 = 7$ lancers sur 10, avec un écart type $\sqrt{10 \times 0{,}7 \times 0{,}3} \approx 1{,}45$.

Sur la planche de Galton, la case la plus remplie se trouve vers np : c'est là que les billes s'accumulent.

Avec la calculatrice

On cherche	Commande
$P(X = k)$	« Binomiale FdP » (ou « binomFdp »)
$P(X \leq k)$	« Binomiale FRép » (ou « binomFRép »)
$P(X \geq k)$	$1 - P(X \leq k-1)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$

Pour le basketteur, $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0{,}617 = 0{,}383$.

Chercher un seuil

Une question classique : « Combien de lancers faut-il pour que la probabilité de réussir **au moins un** lancer dépasse 0,999 ? »

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}3^n \geq 0{,}999 \iff 0{,}3^n \leq 0{,}001 \iff n \geq \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}3} \approx 5{,}7$$

Il faut donc au moins 6 lancers. Attention : $\ln 0{,}3 < 0$, le sens de l'inégalité change quand on divise.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/loi-binomiale/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits