TERMINALE / COURS

La fonction logarithme népérien

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Un capital placé à 5 % par an est multiplié par $1{,}05$ chaque année. Au bout de combien d'années aura-t-il doublé ? Il faut résoudre $1{,}05^n = 2$. L'inconnue est **dans l'exposant** : aucune opération connue ne permet de l'en faire descendre.

Même problème avec $\mathrm{e}^x = 5$ (revois la fonction exponentielle si besoin). On sait que la solution existe (l'exponentielle est continue, strictement croissante, et prend toutes les valeurs positives), mais comment l'écrire ?

01 L'idée : le chemin retour

L'exponentielle est un chemin qui part d'un nombre x et arrive à e^x. Le logarithme népérien est le **même chemin parcouru à l'envers** : il part de e^x et revient à x.

Sur un graphique, les deux courbes sont **symétriques par rapport à la droite** $y = x$: l'une est le reflet de l'autre dans un miroir posé en diagonale.

Et ce chemin retour a un super-pouvoir : il transforme les multiplications en additions. C'est pour ça qu'il fait descendre les exposants.

01 La définition

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution, notée $\ln a$. La fonction $\ln$ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{e}^{\ln a} = a \ \text{ pour } a > 0 \qquad\qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x \ \text{ pour tout réel } x$$

Valeurs à connaître : $\ln 1 = 0$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$) et $\ln \mathrm{e} = 1$.

Le logarithme d'un nombre négatif ou nul **n'existe pas** : l'exponentielle n'arrive jamais là.

Les propriétés algébriques

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tout entier n :

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/logarithme-neperien/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$\begin{aligned}
\ln(a\times b) &= \ln a + \ln b && \text{le produit devient une somme}\\
\ln\left(\tfrac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b && \text{le quotient devient une différence}\\
\ln\left(\tfrac{1}{b}\right) &= -\ln b &&\\
\ln(a^n) &= n\ln a && \text{l'exposant descend}\\
\ln\sqrt{a} &= \tfrac{1}{2}\ln a &&
\end{aligned}$$

Retour au capital : $1{,}05^n = 2 \iff \ln(1{,}05^n) = \ln 2 \iff n\ln 1{,}05 = \ln 2 \iff n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$. Le capital double au bout de 15 ans.

Équations et inéquations

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc elle **conserve l'ordre** :

Pour $a>0$ et $b>0$: $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$.

Pour tout réel k : $\ln x = k \iff x = \mathrm{e}^k$, et $\mathrm{e}^x = k \iff x = \ln k$ (si $k>0$).

Toujours commencer par l'**ensemble de résolution** : l'intérieur d'un $\ln$ doit être strictement positif.

Étude de la fonction ln

$\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Plus généralement, si $u>0$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

- $\frac{1}{x} > 0$, donc $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$.
- $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$, $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc $\ln$ est **concave**.

Les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

La droite $x=0$ est asymptote verticale. Et en $+\infty$, le logarithme monte, mais **très lentement** : il faut aller jusqu'à $x = \mathrm{e}^{10} \approx 22\,026$ pour atteindre la hauteur 10.

Croissances comparées. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

Autrement dit, face à une puissance de x, le logarithme perd toujours. C'est l'inverse de l'exponentielle, qui gagne toujours.

Une dernière limite, qui vient du nombre dérivé de $\ln$ en 1 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exemple guidé

Résous l'inéquation $\ln(2x-1) \leq \ln(x+3)$, puis l'équation $3\mathrm{e}^{2x} = 12$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/logarithme-neperien/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Le domaine se cherche toujours en premier : oublier cette étape ferait garder des solutions où le logarithme n'existe pas.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/logarithme-neperien/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits