TERMINALE / COURS

Limites de suites

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Dans le chapitre précédent, on a étudié la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + 2$. On a démontré qu'elle est croissante et majorée par 3.

Ses termes valent 2 ; $2{,}67$; $2{,}89$; $2{,}96$; $2{,}99$… Elle a l'air de « se coller » à 3. Mais « se coller » n'est pas une définition. Et toutes les suites ne font pas ça : n^2 grimpe sans s'arrêter, $(-1)^n$ saute de -1 à 1 sans se décider.

La question du chapitre : quand n devient très grand, que fait la suite ?

01 L'idée : la fourmi et le drapeau

Une fourmi marche sur une règle. Sa position après n pas, c'est u_n. Un drapeau est planté à 3. À chaque pas, la fourmi parcourt deux tiers de la distance qui la sépare du drapeau : il lui reste 1, puis $\frac{1}{3}$, puis $\frac{1}{9}$, puis $\frac{1}{27}$…

Elle n'atteint jamais le drapeau. Mais si tu traces une bande autour du drapeau, **aussi étroite que tu veux**, la fourmi finit par y entrer et **n'en ressort plus jamais**. C'est ça, une limite : la suite converge vers 3.

01 Les définitions

Limite finie. La suite u a pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on dit que la suite **converge**.

L'intervalle ouvert, c'est la bande autour du drapeau. « À partir d'un certain rang », c'est le moment où la fourmi entre dans la bande pour ne plus en sortir.

Limite infinie. u_n tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang : la fourmi dépasse toutes les bornes A, aussi loin qu'on les place.

Une suite qui tend vers $\pm\infty$, ou qui n'a pas de limite (comme $(-1)^n$), **diverge**.

Les limites à connaître

Suite	Limite
n, n^2, $\sqrt{n}$	$+\infty$
$\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$	0
q^n avec $q > 1$	$+\infty$
q^n avec $-1 < q < 1$	0

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/limites-de-suites/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Suite	Limite
q^n avec $q = 1$	1
q^n avec $q \leq -1$	pas de limite

Opérations et formes indéterminées

Les limites de sommes, produits et quotients se calculent presque toujours « comme on s'y attend ». Sauf dans quatre cas, les formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Deux fourmis partent à l'infini dans des sens opposés : où est le milieu ? Ça dépend de qui va le plus vite. Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme le plus fort.

$$\begin{aligned} n^2 - 3n &= n^2\left(1 - \tfrac{3}{n}\right) && \text{FI } \infty - \infty \text{ : on factorise par } n^2 \\ 1 - \tfrac{3}{n} &\to 1 && \text{car } \tfrac{3}{n} \to 0 \\ n^2 - 3n &\to +\infty && \text{par produit} \end{aligned}$$

Pour un quotient : $\dfrac{2n+1}{n+3} = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \to 2$.

Les théorèmes pour justifier

Comparaison. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Gendarmes. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si v et w ont **la même** limite ℓ, alors $\lim u_n = \ell$.

Limite monotone. Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exemple des gendarmes : $3 - \frac{1}{n+1} \leq 3 + \frac{(-1)^n}{n+1} \leq 3 + \frac{1}{n+1}$, et les deux bornes tendent vers 3, donc la suite du milieu tend vers 3, même si elle zigzague autour du drapeau.

La limite de notre suite

On pose $v_n = u_n - 3$: c'est la position de la fourmi par rapport au drapeau.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = \tfrac{1}{3}u_n + 2 - 3 && \text{on remplace} \\ &= \tfrac{1}{3}u_n - 1 = \tfrac{1}{3}\left(u_n - 3\right) && \text{on factorise} \\ &= \tfrac{1}{3}\,v_n \end{aligned}$$

v est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $v_0 = -1$, donc $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$, donc $\lim u_n = 3$.

Exemple guidé

Trouve la limite de $u_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+n}$ et de $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

1. u_n, **forme indéterminée** $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise par n^2, $u_n = \dfrac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/limites-de-suites/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

2. $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ tendent vers 0, donc u_n tend vers 3.

3. v_n **oscille** entre positif et négatif : aucune opération ne s'applique. On encadre : $-\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$.

4. Les deux suites qui encadrent tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, v_n tend vers 0.

Factoriser par le terme dominant règle la plupart des quotients. Quand la suite oscille, on pense à l'encadrement.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/limites-de-suites/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits