TERMINALE / COURS

Limites de fonctions

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Avec les suites, une seule question : que se passe-t-il quand n devient très grand ? Avec une fonction, on peut se poser la question **à plusieurs endroits** : quand x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$, mais aussi quand x s'approche d'une valeur interdite.

Prends $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. En $x = 2$, on ne peut pas calculer. Mais que fait la courbe **près** de 2 ? Et très loin à droite ?

01 L'idée : le train et les rails

Imagine la courbe comme un train. Certaines droites sont des **rails** : le train finit par rouler collé contre elles, de plus en plus près, sans jamais dérailler. Ces rails, ce sont les asymptotes.

- Un rail **horizontal** $y = \ell$: loin à droite (ou à gauche), le train se stabilise à la hauteur ℓ.
- Un rail **vertical** $x = a$: près de a, le train file vers le ciel (ou vers le sol), en longeant le rail.

Pour $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, il y a deux rails : la droite $x = 2$ et la droite $y = 0$.

01 Les définitions

Limite finie en l'infini. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. La droite $y = \ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.

Limite infinie en un réel. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ dépasse n'importe quel réel A dès que x est assez proche de a. La droite $x = a$ est alors **asymptote verticale**.

Souvent, la limite n'est pas la même des deux côtés de a. On parle de limite **à gauche** ($x \to a^-$, avec $x < a$) et **à droite** ($x \to a^+$, avec $x > a$).

Pour $\dfrac{1}{x-2}$: si $x \to 2^+$, le dénominateur est un tout petit nombre positif, donc $f(x) \to +\infty$. Si $x \to 2^-$, il est tout petit et négatif, donc $f(x) \to -\infty$.

Les limites à connaître

Fonction	en $+\infty$	en $-\infty$	en 0
x^n ($n \geq 1$)	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	0
$\frac{1}{x}$	0	0	$+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/limites-de-fonctions/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Fonction	en $+\infty$	en $-\infty$	en 0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non définie	0
e^{x}	$+\infty$	0	1

Opérations et formes indéterminées

Les règles sont les mêmes que pour les suites. Les quatre formes indéterminées aussi :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Pour un polynôme ou une fraction rationnelle en l'infini, on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+1}{x^2-3x} &= \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} \quad \text{FI } \frac{\infty}{\infty} \\ &= \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} \to 2 \quad \text{en } +\infty \end{aligned}$$

Le train se colle donc au rail horizontal $y = 2$.

Les croissances comparées

Quand l'exponentielle affronte une puissance de x, il y a une forme indéterminée. Le résultat est toujours le même : l'exponentielle gagne.

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \, \mathrm{e}^{x} = 0$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \mathrm{e}^{x}\right)$? On factorise par le plus fort : $x^2 - \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x}} - 1\right)$. La parenthèse tend vers $0 - 1 = -1$, donc la limite vaut $-\infty$.

La composée

Pour $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ en $+\infty$, on procède en deux temps, comme un relais :

1. L'intérieur : $-x^2 \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. L'extérieur : $\mathrm{e}^{X} \to 0$ quand $X \to -\infty$.

Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$.

Les théorèmes de comparaison

Comparaison. Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si g et h ont **la même** limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

Exemple : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0, donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$: le train oscille, mais il se colle quand même au rail $y = 0$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/limites-de-fonctions/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Exemple guidé

Étudie les limites de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ en $+\infty$ et en 3.

1. **En $+\infty$** : forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x : $f(x) = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$, qui tend vers $\frac{2}{1} = 2$.
2. **Asymptote horizontale** : la droite $y = 2$ est asymptote en $+\infty$.
3. **En 3 par la droite** : le numérateur tend vers 7, le dénominateur tend vers 0 en restant positif. Donc $f(x) \to +\infty$.
4. **En 3 par la gauche** : le dénominateur tend vers 0 en restant négatif, donc $f(x) \to -\infty$.
5. **Asymptote verticale** : la droite $x = 3$.

Près d'une valeur interdite, le signe du dénominateur décide de tout : on étudie toujours les deux côtés séparément.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/limites-de-fonctions/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits