TERMINALE / COURS

Intégration

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une voiture roule à une vitesse qui change tout le temps : $v(t) = 3t^2$ (en m/s). Quelle distance parcourt-elle entre $t = 1$ et $t = 2$? On ne peut pas faire « vitesse × temps », puisque la vitesse n'est jamais la même.

Autre question : quelle est l'aire de la surface coincée entre la courbe de x^2, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$? Ce n'est ni un rectangle, ni un triangle.

Ces deux questions ont la même réponse : une intégrale.

01 L'idée : le compteur kilométrique

Dans le chapitre précédent, on regardait le **compteur de vitesse**. Regarde maintenant l'autre cadran : le **compteur kilométrique**. Il additionne, instant après instant, tous les petits bouts de chemin parcourus.

Sur le graphique de la vitesse, chaque petit bout de chemin, c'est un rectangle très fin de hauteur $v(t)$ et de largeur minuscule. Les additionner, c'est remplir l'aire sous la courbe.

La distance parcourue entre $t = a$ et $t = b$, c'est ce qu'affiche le compteur kilométrique à l'arrivée, moins ce qu'il affichait au départ. Et le compteur kilométrique, c'est une primitive de la vitesse.

01 La définition

Aire. Si f est continue et **positive** sur $[a\,;b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'**aire** (en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Calcul. Si f est continue sur $[a\,;b]$ et si F est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Retour à la voiture : une primitive de $3t^2$ est t^3, donc la distance vaut $\int_1^2 3t^2\,\mathrm{d}t = 2^3 - 1^3 = 7$ mètres.

Et l'aire sous x^2 : $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$ unité d'aire.

Le lien avec les primitives est même plus fort : si f est continue, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **la** primitive de f qui s'annule en a. C'est le compteur kilométrique remis à zéro au départ.

Les propriétés

Pour f et g continues sur un intervalle contenant a, b, c, et λ réel :

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/integration/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

- **Linéarité** : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.
- **Chasles** : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
- **Positivité** : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Croissance** : si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Chasles, c'est le trajet en deux étapes : la distance de a à b est la distance de a à c, plus celle de c à b.

Quand la fonction est négative

Si $f \leq 0$ sur $[a\,;b]$, la voiture **recule**. L'intégrale est négative, et l'aire vaut $-\int_a^b f$.

Exemple : $\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^{2\pi} = -1+1 = 0$. Pourtant l'aire entre la courbe et l'axe n'est pas nulle : la partie au-dessus de l'axe et la partie en dessous se compensent.

Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur $[a\,;b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Toujours « celle du haut moins celle du bas ».

La valeur moyenne

La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$) est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour la voiture : $\frac{1}{2-1}\int_1^2 3t^2\,\mathrm{d}t = 7$ m/s. C'est la vitesse constante qui ferait parcourir la même distance dans le même temps.

L'intégration par parties

Quand la fonction est un **produit** qu'on ne sait pas primitiver directement, comme $x\,\mathrm{e}^x$:

Si u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. On pose $u = x$ (qui devient plus simple en dérivant : $u' = 1$) et $v' = \mathrm{e}^x$, donc $v = \mathrm{e}^x$.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/integration/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits