TERMINALE / COURS

Les fonctions trigonométriques

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Ce chapitre prolonge la trigonométrie de Première. Les marées, le courant électrique, le son d'une note de musique, la position d'une nacelle de grande roue : tous ces phénomènes **se répètent**. Pour les décrire, il faut des fonctions qui reviennent régulièrement aux mêmes valeurs. Ce sont les fonctions $\cos$ et $\sin$.

01 L'idée : la grande roue

Monte dans une nacelle d'une grande roue de rayon 1, dont le centre est à l'origine. Tu tournes d'un angle x (en radians), dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

- Ta position **horizontale** (gauche-droite), c'est $\cos x$.
- Ta **hauteur** par rapport au centre, c'est $\sin x$.

Un tour complet, c'est 2π : après un tour, tu reviens exactement au même endroit. C'est pour ça que les courbes de $\cos$ et $\sin$ sont des vagues qui se répètent tous les 2π.

Et comme tu es sur un cercle de rayon 1, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagore), et les deux valeurs restent toujours entre -1 et 1.

01 Les valeurs à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

01 Périodicité et parité

Périodicité. Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$: les fonctions sont **2π-périodiques**.

Parité. $\cos(-x) = \cos x$: $\cos$ est **paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
$\sin(-x) = -\sin x$: $\sin$ est **impaire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Conséquence pratique : pour étudier $\cos$ ou $\sin$, il suffit de l'étudier sur $[0\,;\pi]$, puis de compléter par symétrie et par périodicité.

Dans la grande roue : tourner de $-x$ au lieu de x, c'est le reflet par rapport à l'axe horizontal. La position horizontale ne change pas, la hauteur change de signe.

Dérivées

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/fonctions-trigonometriques/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x$$

Pour a et b réels : $\big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$ et $\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b)$.

Une limite à connaître, qui vient du nombre dérivé de sin en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Variations sur $[0\,;\pi]$

- $(\cos)' = -\sin$, et $\sin x \geq 0$ sur $[0\,;\pi]$: cos est **décroissante** sur $[0\,;\pi]$, de 1 à -1.
- $(\sin)' = \cos$, positif sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$: sin **croît** de 0 à 1, puis **décroît** de 1 à 0.

C'est exactement ce que fait la nacelle : pendant le premier demi-tour, elle va de droite à gauche (cos diminue), et elle monte jusqu'au sommet avant de redescendre (sin).

Équations trigonométriques

$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\pi]$. Comme $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, les solutions sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$: deux nacelles à la même position horizontale, l'une en haut, l'autre en bas.

Le **cercle trigonométrique** est le meilleur outil pour ne rien oublier : place la valeur sur l'axe, trace la droite, et lis les deux points d'intersection.

Exemple guidé

Étudie $f(x) = \cos(2x)$ sur $[0\,;\pi]$, puis résous $f(x) = \frac{1}{2}$ sur cet intervalle.

1. **Période** : $\cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$. La fonction est π-périodique, l'intervalle $[0\,;\pi]$ suffit.
2. **Dérivée** : $f'(x) = -2\sin(2x)$.
3. **Signe** : sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0\,;\pi]$, donc $\sin(2x) \geq 0$ et f décroît de 1 à -1. Sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\sin(2x) \leq 0$ et f remonte jusqu'à 1.
4. **Équation** : $2x \in [0\,;2\pi]$ et $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ donne $2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \frac{5\pi}{3}$.
5. Les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Le piège : résoudre pour $2x$ sur $[0\,;\pi]$ seulement. Quand x parcourt $[0\,;\pi]$, $2x$ fait un tour complet.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/fonctions-trigonometriques/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits