TERMINALE / COURS

Dérivation et convexité

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

En première, tu as appris à dériver pour trouver les variations d'une fonction : $f' > 0$, ça monte ; $f' < 0$, ça descend. Mais deux courbes peuvent monter toutes les deux, l'une de plus en plus vite, l'autre de plus en plus lentement. Comment les distinguer ? Et comment dériver e^{3x^2+1} ou $\sqrt{1+x^2}$?

01 L'idée : la voiture sur la route de montagne

Imagine que tu conduis une voiture sur la courbe, de gauche à droite.

- f', c'est la **pente** de la route : positive, tu montes ; négative, tu descends.
- f'', c'est le **sens du volant** : si tu tournes à gauche, la route se creuse comme un bol, la fonction est convexe. Si tu tournes à droite, la route fait une bosse, la fonction est concave.
- Le moment où tu passes le volant de gauche à droite (ou l'inverse), c'est un point d'inflexion.

01 Dériver une composée

Formule. Si $f(x) = g(ax+b)$, alors $f'(x) = a\,g'(ax+b)$.

Plus généralement, $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$.

Les cas à connaître par cœur :

Fonction	Dérivée
e^{u}	$u'\,\mathrm{e}^{u}$
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\sqrt{u}$ (avec $u > 0$)	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\dfrac{1}{u}$ (avec $u \neq 0$)	$-\dfrac{u'}{u^2}$

Exemple : $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2+1}$. Ici $u(x) = 3x^2+1$ et $u'(x) = 6x$, donc $f'(x) = 6x\,\mathrm{e}^{3x^2+1}$.

La dérivée seconde

Si f' est elle-même dérivable, sa dérivée est la **dérivée seconde** de f, notée f''.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x^2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$.

La convexité

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/derivation-et-convexite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Définition. f est **convexe** sur I si sa courbe est **au-dessus de toutes ses tangentes** sur I. Elle est **concave** si sa courbe est en dessous de toutes ses tangentes.

Théorème. Si f est deux fois dérivable sur I :

- f convexe sur $I \iff f'$ croissante sur $I \iff f'' \geq 0$ sur I ;
- f concave sur $I \iff f'$ décroissante sur $I \iff f'' \leq 0$ sur I.

Une autre façon de voir la convexité : la courbe est **en dessous de ses cordes**. Si tu relies deux points de la courbe par un segment, le bol reste sous le segment.

Les exemples à connaître : x^2 et e^x sont convexes sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;+\infty[$; x^3 est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

Le point d'inflexion

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe **traverse sa tangente**. Si f'' **s'annule en changeant de signe** en a, alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion.

Avec $f(x) = x^3 - 3x^2$: $f''(x) = 6(x-1)$ est négative avant 1 et positive après. La fonction est concave sur $]-\infty\,;1]$, convexe sur $[1\,;+\infty[$, et le point $(1\,;-2)$ est un point d'inflexion : c'est là que la voiture change le sens du volant.

Utiliser la convexité pour une inégalité

La fonction exponentielle est convexe, donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, la droite $y = x + 1$. On obtient, sans aucun calcul :

$$\mathrm{e}^x \geq x + 1 \quad \text{pour tout réel } x.$$

C'est une inégalité qui revient souvent au bac.

Exemple guidé

Étudie la convexité de $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. **Dérivée d'une composée** : $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u = -x^2$. Donc $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. **Dérivée seconde** (produit) : $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (4x^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
3. **Le signe** : l'exponentielle est positive, f'' a le signe de $4x^2 - 2$, qui s'annule en $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. **Conclusion** : f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[$, concave entre les deux. La courbe a deux points d'inflexion, en $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C'est la courbe en cloche : bombée vers le haut au centre, elle se creuse sur les côtés en approchant de l'axe.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/derivation-et-convexite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits