TERMINALE / COURS

Dénombrement et combinatoire

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Combien de codes différents pour un cadenas à 4 chiffres ? Combien de podiums possibles dans une course de 8 coureurs ? Combien de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 ? On ne peut pas tout écrire : il faut **compter sans énumérer**.

01 L'idée : le vestiaire, le podium et la poignée de cartes

Trois situations reviennent tout le temps.

- **Le vestiaire.** Tu as 3 t-shirts et 4 pantalons. Pour chaque t-shirt, 4 pantalons possibles : $3 \times 4 = 12$ tenues. Les choix s'enchaînent, les nombres se multiplient.
- **Le podium.** 8 coureurs, 3 places. Pour l'or, 8 choix ; pour l'argent, il en reste 7 ; pour le bronze, 6. L'ordre compte et on ne peut pas être deux fois sur le podium : $8 \times 7 \times 6 = 336$.
- **La poignée de cartes.** Tu prends 3 cartes d'un coup. L'ordre ne compte pas : avoir « roi, dame, as » ou « as, roi, dame », c'est la même main.

Toute la difficulté du chapitre est de reconnaître dans quelle situation on est.

01 Le principe multiplicatif

Cardinal d'un produit cartésien. Si E a n éléments et F en a p, alors $E \times F$ a $n \times p$ éléments.

k-uplets. Le nombre de k-uplets d'éléments d'un ensemble à n éléments (on choisit k fois, **avec répétition**, **ordre important**) est n^k.

Le cadenas à 4 chiffres : $10^4 = 10\,000$ codes. Une même roue peut afficher le même chiffre que sa voisine.

Le nombre de **parties** d'un ensemble à n éléments est 2^n : pour chaque élément, deux choix, dedans ou dehors.

Arrangements et permutations

Un **arrangement** de k éléments parmi n est un k-uplet d'éléments **distincts** (ordre important, **sans répétition**). Leur nombre est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Une **permutation** de n éléments est un arrangement des n éléments. Il y en a $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/denombrement/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Par convention, $0! = 1$. Exemple : il y a $5! = 120$ façons de ranger 5 livres sur une étagère.

Les combinaisons

Une **combinaison** de k éléments parmi n est une **partie** à k éléments (ordre **sans importance**, sans répétition). Leur nombre est :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

D'où vient la formule ? Chaque poignée de k cartes donne $k!$ podiums différents (on peut ranger les k cartes de $k!$ façons). Donc le nombre de poignées est le nombre de podiums divisé par $k!$.

Mains de 5 cartes dans un jeu de 32 : $\binom{32}{5} = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1} = 201\,376$.

Les propriétés des coefficients binomiaux

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.
- **Symétrie** : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Choisir les k cartes qu'on garde, c'est choisir les $n-k$ qu'on laisse.
- **Relation de Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

La relation de Pascal permet de construire le **triangle de Pascal**, ligne après ligne : chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus de lui.

n					
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Le tableau de décision

L'ordre compte ?	Répétitions possibles ?	Outil	Nombre
oui	oui	k-uplets	n^k
oui	non	arrangements	$\frac{n!}{(n-k)!}$
non	non	combinaisons	$\binom{n}{k}$

Exemple guidé

Une classe compte 30 élèves, 12 filles et 18 garçons. Combien de façons d'élire un délégué et un suppléant ? De former un groupe de 3 ? Un groupe de 3 avec au moins une fille ?

1. **Délégué puis suppléant** : l'ordre compte et on ne répète pas. C'est un arrangement, $30 \times 29 = 870$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/denombrement/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

2. **Groupe de 3** : l'ordre ne compte pas. C'est une combinaison, $\binom{30}{3} = \dfrac{30 \times 29 \times 28}{3 \times 2 \times 1} = 4\,060$.
3. **Au moins une fille** : on passe par le contraire, « aucune fille », c'est-à-dire 3 garçons parmi 18 : $\binom{18}{3} = 816$.
4. Il reste $4\,060 - 816 = 3\,244$ groupes avec au moins une fille.

Les deux questions à se poser avant tout calcul : l'ordre compte-t-il ? peut-on répéter ? Et dès qu'on lit « au moins un », on pense au contraire.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/denombrement/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits