TERMINALE / EXERCICES CORRIGÉS

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Justifier une continuité ●○○ Application

Justifier que la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + x^2}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Indice

Regarde le numérateur, le dénominateur, et vérifie que le dénominateur ne s'annule jamais.

Numérateur et dénominateur

e^x et x^2 sont continues sur $\mathbb{R}$, donc leur somme aussi. $x^2 + 1$ est un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$.

Le dénominateur ne s'annule pas

Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Conclusion

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ex. 2 Au moins une solution ●○○ Application

Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

Indice

Calcule $f(0)$ et $f(1)$.

Les images des bornes

$f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$.

Les hypothèses du TVI

f est un polynôme, donc continue sur $[0\,;1]$, et 0 est compris entre $f(1)$ et $f(0)$.

← le crayon passe de +1 à -2

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/continuite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Conclusion

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

Ex. 3 Une unique solution ●●○ Méthode

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1\,;0]$.

Indice

$\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$.

Les variations

$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Les images

$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -0{,}63 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$.

Conclusion

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-1\,;0]$, et 0 est compris entre $f(-1)$ et $f(0)$. D'après le corollaire du TVI, l'équation admet une unique solution α dans $[-1\,;0]$.

Ex. 4 Encadrer par balayage ●●○ Méthode

On reprend $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ et la solution $\alpha \in [-1\,;0]$ de $f(x) = 0$. Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$, puis $0{,}01$.

Indice

Calcule $f(-0{,}6)$ et $f(-0{,}5)$.

Pas de 0,1

$f(-0{,}6) \approx 0{,}549 - 0{,}6 = -0{,}051 < 0$ et $f(-0{,}5) \approx 0{,}607 - 0{,}5 = 0{,}107 > 0$. Donc $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

Pas de 0,01

$f(-0{,}57) \approx 0{,}566 - 0{,}57 = -0{,}004 < 0$ et $f(-0{,}56) \approx 0{,}571 - 0{,}56 = 0{,}011 > 0$.

← on cherche où le signe change

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/continuite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Conclusion

$-0{,}57 < \alpha < -0{,}56$.

Ex. 5 Le piège de l'unicité ●●○ Piège

Soit $f(x) = x^2 - 2$ sur $[-2\,;2]$. On a $f(-2) = 2$ et $f(2) = 2$. Un élève affirme : « 0 n'est pas compris entre $f(-2)$ et $f(2)$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution. » A-t-il raison ?

Indice

Le TVI donne une condition suffisante, pas nécessaire.

L'erreur

Le TVI dit : si k est entre les images des bornes, alors il y a une solution. Il ne dit rien quand ce n'est pas le cas.

Le contre-exemple

$f(\sqrt{2}) = 2 - 2 = 0$, et $\sqrt{2} \in [-2\,;2]$. Il y a même deux solutions, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

← *le crayon descend puis remonte*

Conclusion

L'élève a tort. Pour conclure avec le TVI, il faut découper l'intervalle là où la fonction change de sens de variation, ici en 0.

Ex. 6 La limite d'une suite récurrente ●●○ Application

On admet que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n + 1}$ converge vers un réel $\ell > 0$. Déterminer ℓ.

Indice

La fonction $x \mapsto \frac{x+4}{x+1}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

On utilise la continuité

La fonction $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ est continue en $\ell > 0$, donc $\ell = f(\ell)$.

On résout

$\ell(\ell + 1) = \ell + 4$, donc $\ell^2 = 4$, soit $\ell = 2$ ou $\ell = -2$.

Conclusion

Comme $\ell > 0$, $\ell = 2$.

●●●

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/continuite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Ex. 7 Étude type bac

Type bac

Soit g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$, et que $2 < \alpha < 3$.
3. En déduire le signe de g sur $[0\,;+\infty[$.

Indice

$g'(x) = 3(x^2 - 1)$. Sur $[0\,;1]$, regarde le signe de g directement.

Question 1

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $[0\,;+\infty[$, $x+1 > 0$, donc g' est du signe de $x - 1$: g est décroissante sur $[0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Question 2, sur [0 ; 1]

$g(0) = -3$ et $g(1) = -5$. Comme g est décroissante sur $[0\,;1]$, $g(x) \leq -3 < 0$ sur cet intervalle. Pas de solution.

← *on découpe là où le sens change*

Question 2, sur [1 ; +∞[

g est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$, $g(1) = -5 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$. D'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$. De plus $g(2) = -1 < 0$ et $g(3) = 15 > 0$, donc $2 < \alpha < 3$.

Question 3

$g(x) < 0$ sur $[0\,;\alpha[$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/continuite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits