TERMINALE / COURS

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

On cherche à résoudre $x^3 + x - 1 = 0$. Aucune formule du cours ne donne la solution. Pourtant, on aimerait savoir **s'il existe** une solution, **combien** il y en a, et en donner une **valeur approchée**.

C'est exactement à ça que sert la continuité.

01 L'idée : le crayon et la rivière

Une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer sa courbe **sans lever le crayon** : pas de saut, pas de trou.

Maintenant, imagine une rivière horizontale à la hauteur k. Ton crayon part d'un point **sous** la rivière et arrive à un point **au-dessus**. Sans lever le crayon, tu es obligé de traverser la rivière au moins une fois. C'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Et si en plus ton crayon ne fait que monter (fonction strictement croissante), tu ne la traverses **qu'une seule fois**.

01 La définition

Continuité. Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Elle est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Ce qu'il faut retenir pour les exercices :

- Les fonctions polynômes, e^x, $\cos$, $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$; les fractions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.
- Une fonction dérivable sur I est continue sur I. La réciproque est fausse : $|x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Un exemple de fonction **non** continue : la partie entière, qui fait des marches d'escalier. Le crayon doit se lever à chaque entier.

Le théorème des valeurs intermédiaires

TVI. Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a\,;b]$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/continuite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Corollaire (bijection). Si f est continue **et strictement monotone** sur $[a\,;b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique** solution dans $[a\,;b]$.

Le corollaire marche aussi sur un intervalle ouvert ou infini, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites aux bornes.

Retour au problème

Soit $f(x)=x^3+x-1$ sur $[0\,;1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+1>0 && \text{donc } f \text{ est strictement croissante}\\ f(0) &= -1<0 && \text{le crayon part sous la rivière}\\ f(1) &= 1>0 && \text{et arrive au-dessus}\end{aligned}$$

f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $[0\,;1]$, et 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

Encadrer la solution : le balayage

On calcule f avec un pas de $0{,}1$, et on regarde où le signe change :

x	$0{,}6$	$0{,}7$
$f(x)$	$-0{,}184$	$0{,}043$

Le signe change entre $0{,}6$ et $0{,}7$, donc $0{,}6<\alpha<0{,}7$. On recommence avec un pas de $0{,}01$ pour aller plus loin : $f(0{,}68)\approx -0{,}006$ et $f(0{,}69)\approx 0{,}018$, donc $0{,}68<\alpha<0{,}69$.

La méthode par **dichotomie** fait la même chose en coupant l'intervalle en deux à chaque étape : c'est un algorithme classique en Python.

Continuité et suites

Si $u_{n+1}=f(u_n)$, si la suite u converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $\ell=f(\ell)$.

C'est ce qui permet de trouver la limite d'une suite récurrente : avec $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$, la limite vérifie $\ell=\frac{1}{3}\ell+2$, donc $\ell=3$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/terminale/continuite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits