SECONDE / COURS

Les ensembles de nombres et les intervalles

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Le nombre $\frac{1}{3}$ est-il un nombre décimal ? Et $\sqrt{2}$, peut-on l'écrire comme une fraction ? Comment écrire proprement « tous les nombres compris entre 2 et 5, 5 compris » ?

Pour répondre, il faut ranger les nombres dans des **familles**, et savoir décrire des morceaux de la droite des réels.

01 L'idée : les poupées russes

Les ensembles de nombres s'emboîtent comme des **poupées russes** : chaque poupée contient toutes les plus petites.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Un entier naturel est aussi un entier relatif, qui est aussi un décimal, et ainsi de suite. Mais l'inverse est faux : -3 est dans $\mathbb{Z}$ sans être dans $\mathbb{N}$.

01 Les cinq ensembles

- $\mathbb{N}$, les **entiers naturels** : $0, 1, 2, 3\ldots$
- $\mathbb{Z}$, les **entiers relatifs** : $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots$
- $\mathbb{D}$, les **décimaux** : les nombres qui s'écrivent $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Leur écriture décimale s'arrête. Exemple : $2{,}375$.
- $\mathbb{Q}$, les **rationnels** : les quotients $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. Exemple : $\frac{1}{3}$.
- $\mathbb{R}$, les **réels** : tous les nombres de la droite graduée. Exemple : $\sqrt{2}$, π.

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ ne s'arrête jamais : c'est un rationnel, **pas un décimal**. Et $\sqrt{2}$ n'est même pas rationnel : on dit qu'il est **irrationnel** (la démonstration est un classique de Seconde, elle est dans les exercices).

Les intervalles

Un **intervalle** est un morceau de la droite des réels, sans trou. Imagine un tronçon de route avec une barrière à chaque bout : le crochet dit si la barrière fait partie du tronçon.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/seconde/ensembles-de-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Intervalle	Signifie	Bornes
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	les deux incluses
$]a\,;b[$	$a < x < b$	les deux exclues
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	a incluse, b exclue
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	a incluse
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	b exclue

L'**intersection** $I \cap J$ contient les nombres qui sont dans les deux intervalles à la fois. La **réunion** $I \cup J$ contient ceux qui sont dans l'un ou dans l'autre. Exemple : $[0\,;5] \cap [3\,;8] = [3\,;5]$ et $[0\,;5] \cup [3\,;8] = [0\,;8]$.

La valeur absolue : une distance

La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est la **distance** entre x et 0 sur la droite graduée. Plus généralement, $|x - a|$ est la distance entre x et a.

Donc $|x - 3| \leq 2$ veut dire « x est à moins de 2 de 3 », soit $x \in [1\,;5]$.

Puissances et racines carrées

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$; $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$; $(a^n)^p = a^{np}$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et, si $b > 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Mais $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général.

Exemple : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.

Exemple guidé

Écris avec des intervalles l'ensemble des réels x tels que $|x - 3| \leq 2$, puis son intersection avec $]4\,;8]$.

1. **Lire la valeur absolue comme une distance** : $|x - 3|$ est la distance entre x et 3 sur la droite.
2. Être à distance au plus 2 de 3, c'est être entre $3 - 2 = 1$ et $3 + 2 = 5$, bornes comprises : $x \in [1\,;5]$.
3. **Intersection** : les réels qui sont à la fois dans $[1\,;5]$ et dans $]4\,;8]$ forment $]4\,;5]$. Le 4 est exclu car il n'est pas dans le second intervalle.
4. **Réunion**, pour comparer : $[1\,;5] \cup]4\,;8] = [1\,;8]$.

Au passage, une simplification de racine : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.

Retour au problème

- $\frac{1}{3}$ est dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{D}$: son écriture décimale ne s'arrête pas.
- $\sqrt{2}$ est dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$: c'est un irrationnel.
- « Entre 2 et 5, 5 compris » s'écrit $]2\,;5]$.

La suite logique : apprendre à transformer des expressions avec des lettres, dans le chapitre Calcul littéral et équations.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/seconde/ensembles-de-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/seconde/ensembles-de-nombres/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits