PREMIÈRE / EXERCICES CORRIGÉS

Variables aléatoires réelles

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Compléter une loi

●○○ Application

X prend les valeurs -1, 0, 2 et 4 avec $P(X=-1)=0{,}3$, $P(X=0)=0{,}1$, $P(X=2)=0{,}4$.

1. Calculer $P(X=4)$.
2. Calculer $P(X\geq 0)$ et $E(X)$.

Indice

La somme des probabilités vaut 1.

Question 1

$P(X=4)=1-0{,}3-0{,}1-0{,}4=0{,}2$.

Question 2

$P(X\geq 0)=0{,}1+0{,}4+0{,}2=0{,}7$ et $E(X)=-0{,}3+0+0{,}8+0{,}8=1{,}3$.

Ex. 2 Le jeu de la roue

●○○ Méthode

Une roue a 10 secteurs identiques : 1 rouge, 3 bleus, 6 blancs. Une partie coûte 3 €. Rouge : on reçoit 15 € ; bleu : on reçoit 4 € ; blanc : rien. X est le gain net.

1. Donner la loi de X.
2. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Indice

Gain net = somme reçue moins la mise.

Question 1

X vaut $15-3=12$ avec la probabilité $0{,}1$, $4-3=1$ avec $0{,}3$, et -3 avec $0{,}6$.

← *on retire la mise*

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/variables-aleatoires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Question 2

$E(X) = 0{,}1 \times 12 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}6 \times (-3) = 1{,}2 + 0{,}3 - 1{,}8 = -0{,}3.$

Conclusion

$E(X) = -0{,}3$ €, le jeu est défavorable au joueur : il perd 30 centimes par partie en moyenne.

Ex. 3 Variance et écart type ●●○ Application

On reprend le jeu de la roue. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Indice

Calcule d'abord $E(X^2)$.

E(X²)

$E(X^2) = 0{,}1 \times 144 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}6 \times 9 = 14{,}4 + 0{,}3 + 5{,}4 = 20{,}1.$

La variance

$V(X) = 20{,}1 - (-0{,}3)^2 = 20{,}1 - 0{,}09 = 20{,}01.$

L'écart type

$\sigma(X) \approx 4{,}47$ € : les gains sont très dispersés autour de la moyenne.

Ex. 4 Rendre le jeu équitable ●●○ Méthode

Toujours avec la roue : quelle somme s faut-il donner pour le secteur rouge (au lieu de 15 €) pour que le jeu devienne équitable ?

Indice

Le gain net pour le rouge devient $s - 3$.

L'espérance

$E(X) = 0{,}1(s - 3) + 0{,}3 \times 1 + 0{,}6 \times (-3) = 0{,}1s - 0{,}3 + 0{,}3 - 1{,}8 = 0{,}1s - 1{,}8.$

La condition

$E(X) = 0 \iff 0{,}1s = 1{,}8 \iff s = 18.$

Conclusion

Il faut donner 18 € pour le secteur rouge.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/variables-aleatoires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Ex. 5 Transformation affine ●●○ Piège

La note X d'un contrôle a pour espérance 9 et pour écart type 3. Le professeur décide de multiplier toutes les notes par 1,2 puis d'ajouter 1 point. Un élève dit : « la nouvelle moyenne est 11,8 et le nouvel écart type est 4,6 ». A-t-il raison ?

Indice

$Y = 1{,}2X + 1$. Le $+1$ ne change pas l'écart type.

L'espérance

$E(Y) = 1{,}2 \times 9 + 1 = 11{,}8$. Juste.

L'écart type

L'élève a fait $1{,}2 \times 3 + 1 = 4{,}6$. Mais ajouter 1 point à tout le monde décale les notes sans les écarter.

← *le +1 disparaît*

Conclusion

$\sigma(Y) = 1{,}2 \times 3 = 3{,}6$. L'élève a tort pour l'écart type.

Ex. 6 Tirages successifs ●●● Type bac

Une urne contient 2 boules rouges et 3 noires. On tire successivement 2 boules **avec remise**. On gagne 5 € par boule rouge et on perd 2 € par boule noire. X est le gain.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$.

Indice

Fais un arbre, $P(R) = 0{,}4$ à chaque tirage.

Les valeurs

2 rouges, $X = 10$; 1 rouge et 1 noire, $X = 3$; 2 noires, $X = -4$.

Question 1

$P(X = 10) = 0{,}4^2 = 0{,}16$; $P(X = 3) = 2 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}48$ (deux chemins) ; $P(X = -4) = 0{,}6^2 = 0{,}36$.

← *deux chemins pour une rouge*

Question 2

$E(X) = 1{,}6 + 1{,}44 - 1{,}44 = 1{,}6$. On gagne en moyenne 1,60 € par partie.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/variables-aleatoires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/variables-aleatoires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits