PREMIÈRE / COURS

Variables aléatoires réelles

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

À la fête foraine, un stand propose : « 2 € la partie. Tu lances un dé : avec un 6, tu gagnes 8 € ; avec un 5, on te rembourse ; sinon, tu perds ta mise. » Faut-il jouer ? Le forain gagne-t-il de l'argent ?

Pour répondre, on ne s'intéresse plus seulement aux issues (1, 2, …, 6) mais à **ce qu'elles rapportent**. C'est le rôle d'une variable aléatoire.

01 L'idée : le stand de fête foraine

Chaque issue de l'expérience est une case du stand. Sur chaque case, le forain a collé une **étiquette avec un nombre** : ce que tu gagnes (ou perds) si la boule tombe là.

- La **variable aléatoire** X, c'est la lecture de l'étiquette.
- La **loi** de X, c'est le tableau qui dit, pour chaque montant possible, avec quelle probabilité tu le lis.
- L'espérance, c'est ce que tu gagnes **en moyenne par partie** si tu joues un très grand nombre de fois.
- La **variance** et l'**écart type** mesurent si les gains sont sages ou très dispersés.

01 Variable aléatoire et loi

Une **variable aléatoire** X sur un univers Ω est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue.

La **loi de probabilité** de X donne, pour chaque valeur x_i prise par X, la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. On a toujours $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Pour le stand, le gain **net** X (gain moins la mise de 2 €) vaut 6 avec un 6, 0 avec un 5, et -2 sinon :

x_i	-2	0	6
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On note aussi $P(X \leq a)$, $P(X > a)$… Par exemple $P(X \geq 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

L'espérance

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$$

Pour le stand : $E(X) = \frac{4}{6} \times (-2) + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{-8+6}{6} = -\frac{1}{3}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/variables-aleatoires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

En moyenne, le joueur perd environ 33 centimes par partie : le jeu est défavorable au joueur, et le forain gagne en moyenne 33 centimes par partie. Un jeu est **équitable** si $E(X) = 0$.

Variance et écart type

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Formule pratique (König-Huygens) : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, avec $E(X^2) = \sum p_i\, x_i^2$.

Deux stands peuvent avoir la même espérance mais des risques très différents : l'un fait gagner ou perdre quelques centimes, l'autre fait perdre souvent mais rapporte parfois un gros lot. L'écart type mesure cette **dispersion**, dans la même unité que X (ici, en euros).

Transformation affine

Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b \qquad V(aX + b) = a^2\,V(X) \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$$

Si le forain double tous les gains et ajoute 1 € de bonus à chaque partie, le nouveau gain est $Y = 2X + 1$: $E(Y) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}$. Ajouter une constante décale tout, mais ne change pas la dispersion : le $+1$ disparaît dans la variance.

Répéter l'expérience

Simule le stand 10 000 fois à l'ordinateur et calcule le gain moyen : tu trouveras un nombre très proche de $-0{,}33$. C'est le sens concret de l'espérance, que la loi des grands nombres rendra précis en Terminale.

Exemple guidé

Une urne contient 5 boules : 1 rouge (on gagne 10 €), 2 vertes (on gagne 2 €), 2 noires (on perd 3 €). X est le gain. Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

1. **La loi** : $P(X = 10) = \frac{1}{5}$, $P(X = 2) = \frac{2}{5}$, $P(X = -3) = \frac{2}{5}$. La somme fait bien 1.
2. **L'espérance** : $E(X) = 10 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} - 3 \times \frac{2}{5} = \frac{10+4-6}{5} = 1{,}6$.
3. **La variance** : $V(X) = \frac{1}{5}(10 - 1{,}6)^2 + \frac{2}{5}(2 - 1{,}6)^2 + \frac{2}{5}(-3 - 1{,}6)^2 = 14{,}112 + 0{,}064 + 8{,}464 = 22{,}64$.
4. **L'écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{22{,}64} \approx 4{,}76$ €.

Le jeu est favorable au joueur : il gagne 1,60 € par partie en moyenne. Mais l'écart type élevé dit que les gains varient beaucoup d'une partie à l'autre.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/variables-aleatoires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits