PREMIÈRE / COURS

Trigonométrie et cercle trigonométrique

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Au collège, le cosinus et le sinus servaient à calculer des longueurs dans un triangle rectangle, avec des angles entre 0° et 90°. Mais une roue tourne bien plus loin que 90°, elle fait des tours entiers, dans un sens ou dans l'autre. Comment parler du cosinus d'un angle de 200°, ou de -3 tours ?

Il faut une nouvelle façon de mesurer les angles, et un nouvel outil : le **cercle trigonométrique**.

01 L'idée : le fil et la bobine

Prends une bobine de rayon 1 et un fil gradué comme une règle : $0, 1, 2, 3\ldots$ et aussi $-1, -2\ldots$ Pose le zéro du fil sur le point $I(1\,;0)$ de la bobine, puis **enroule** le fil autour : les nombres positifs dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, les négatifs dans l'autre sens.

Chaque nombre réel x du fil vient se poser sur un point M de la bobine. Le cosinus et le sinus de x, ce sont simplement les coordonnées de ce point : $M(\cos x\,;\sin x)$.

Comme la bobine a pour rayon 1, son tour complet mesure 2π. Après un tour de fil, on retombe au même endroit : x et $x+2\pi$ arrivent sur le même point.

01 Le radian

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens direct).

Le **radian** est l'unité d'angle telle qu'un tour complet mesure 2π radians. Ainsi $180^\circ = \pi$ rad, et pour convertir : $\text{angle en rad} = \text{angle en degrés} \times \dfrac{\pi}{180}$.

Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Un même point du cercle est atteint par une infinité de réels : x, $x+2\pi$, $x-2\pi$, $x+4\pi$… On les écrit $x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Celui qui est dans $]-\pi\,;\pi]$ s'appelle la **mesure principale**.

Cosinus et sinus d'un réel

Si le réel x s'enroule sur le point M du cercle trigonométrique, alors $\cos x$ est l'**abscisse** de M et $\sin x$ son **ordonnée**.

Pour tout réel x : $-1\le\cos x\le 1$, $-1\le\sin x\le 1$ et $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/trigonometrie/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

La dernière égalité, c'est Pythagore dans le cercle de rayon 1.

Les valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Astuce pour s'en souvenir : le sinus monte $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{4}}{2}$, et le cosinus fait le chemin inverse.

Les angles associés

On les retrouve par symétrie sur le cercle, sans rien apprendre par cœur.

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses) ;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) ;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$ (symétrie par rapport à O) ;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Exemple : $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Les fonctions cosinus et sinus

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et **2π-périodiques** : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

$\cos$ est **paire** (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) ; $\sin$ est **impaire** (courbe symétrique par rapport à l'origine).

Leurs courbes sont des vagues qui se répètent tous les 2π : c'est le fil qui repasse sans fin sur la bobine. Sur $[0\,;\pi]$, $\cos$ décroît de 1 à -1 ; $\sin$ croît de 0 à 1 sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis décroît jusqu'à 0.

Résoudre une équation simple

Pour résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi\,;\pi]$: on place $\frac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses, on trace la verticale, elle coupe le cercle en **deux** points, ceux de $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. Les solutions sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Exemple guidé

Trouve la mesure principale de $\dfrac{17\pi}{4}$, puis calcule $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6}$.

1. **Mesure principale** : on retire des tours complets ($2\pi = \frac{8\pi}{4}$) jusqu'à tomber dans $]-\pi\,;\pi]$. $\dfrac{17\pi}{4} - 2\times\dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.
2. **Angle associé** : $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$. Le point est le symétrique de celui de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des ordonnées.
3. **On en déduit** : $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.
4. **Une équation** : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi\,;\pi]$. L'horizontale d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ coupe le cercle en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/trigonometrie/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Retour au problème

Un angle de 200° mesure $\frac{200\pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$ radians, et son cosinus est négatif car le point est à gauche du cercle. -3 tours, c'est -6π : on revient au point de départ, donc $\cos(-6\pi) = 1$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/trigonometrie/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits