PREMIÈRE / COURS

Les suites numériques

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Léa place 1 000 € sur un livret. Deux offres : on lui ajoute **50 € par an**, ou on augmente son capital de **4 % par an**. Laquelle est la plus intéressante au bout de 10 ans ? Au bout de 30 ans ?

Pour répondre, il faut suivre une liste de nombres année après année : c'est une **suite**.

01 L'idée : l'escalier et la photocopieuse

Une suite, c'est une liste de nombres numérotés : u_0, u_1, u_2… Le numéro n s'appelle l'**indice**, et u_n est le **terme de rang** n.

Deux machines fabriquent les suites les plus importantes.

- **L'escalier.** Chaque marche a la même hauteur r. Pour passer d'une marche à la suivante, on ajoute r. C'est une suite arithmétique.
- **La photocopieuse.** Elle agrandit (ou réduit) chaque copie avec le même zoom q. Pour passer d'une copie à la suivante, on multiplie par q. C'est une suite géométrique.

L'offre « + 50 € » est un escalier. L'offre « + 4 % » est une photocopieuse réglée sur $1{,}04$.

01 Deux façons de définir une suite

- **Formule explicite** : $u_n = f(n)$, par exemple $u_n = 3n + 2$. On calcule directement n'importe quel terme.
- **Relation de récurrence** : on donne le premier terme et la façon de passer d'un terme au suivant, par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Pour connaître u_{10}, il faut calculer tous les termes avant.

01 Suites arithmétiques

u est **arithmétique** de raison r si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.

- Terme général : $u_n = u_0 + n\,r$ (et plus généralement $u_n = u_p + (n-p)\,r$).
- Sens de variation : croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.
- Somme : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on montre que c'est une **constante**.

Suites géométriques

u est **géométrique** de raison q si, pour tout n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/suites-numeriques/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

- Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$ (et plus généralement $u_n = u_p \times q^{n-p}$).
- Sens de variation (si $u_0 > 0$) : croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.
- Somme : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$.

Pour prouver qu'une suite à termes non nuls est géométrique, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que c'est une **constante**.

Une **évolution de** $t\,\%$ correspond à une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$: une hausse de 4 %, c'est $\times 1{,}04$; une baisse de 20 %, c'est $\times 0{,}8$.

Sens de variation d'une suite

u est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.

Méthodes : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; ou, si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$; ou, pour des termes strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Une première idée de limite

Quand n devient très grand :

- l'escalier monte sans s'arrêter si $r > 0$: $u_n \to +\infty$;
- avec $q > 1$, la photocopieuse grossit l'image sans limite : $q^n \to +\infty$;
- avec $0 < q < 1$, elle la rétrécit jusqu'à presque rien : $q^n \to 0$.

Les limites seront étudiées en détail en Terminale, dans le chapitre Limites de suites.

Exemple guidé

(u_n) est arithmétique avec $u_0 = 5$ et une raison 3. (v_n) est géométrique avec $v_0 = 2$ et une raison 3. Calcule u_{10}, v_5, puis la somme des premiers termes.

1. **Terme général arithmétique** : $u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$, donc $u_{10} = 35$.
2. **Somme arithmétique** : $u_0 + \cdots + u_{10}$ compte 11 termes, elle vaut $11 \times \dfrac{5 + 35}{2} = 220$.
3. **Terme général géométrique** : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$, donc $v_5 = 2 \times 243 = 486$.
4. **Somme géométrique** : $v_0 + \cdots + v_5 = 2 \times \dfrac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728$.

Même raison, comportements opposés : l'une ajoute 3 à chaque pas, l'autre multiplie par 3. Au rang 10, $u_{10} = 35$ alors que $v_{10} = 118\,098$.

Retour au problème

Escalier : $a_n = 1\,000 + 50n$. Photocopieuse : $b_n = 1\,000 \times 1{,}04^n$.

Année	10	20	30
a_n (+ 50 €)	1 500 €	2 000 €	2 500 €
b_n (+ 4 %)	1 480 €	2 191 €	3 243 €

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/suites-numeriques/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Au début, l'escalier est légèrement devant. Mais à partir de la 12e année, la photocopieuse le dépasse, et l'écart ne cesse de grandir : une croissance géométrique finit toujours par battre une croissance arithmétique.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/suites-numeriques/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits