PREMIÈRE / COURS

Le second degré

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

On lance une balle. Sa hauteur (en mètres) au bout de x secondes est $h(x) = -5x^2 + 10x + 15$. Quand retombe-t-elle au sol ? À quelle hauteur maximale monte-t-elle ? Pendant combien de temps est-elle au-dessus de 15 mètres ?

Toutes ces questions mènent à des expressions de la forme $ax^2 + bx + c$: les **trinômes du second degré**.

01 L'idée : le jet d'eau de la fontaine

Regarde le jet d'eau d'une fontaine : il monte, atteint un sommet, et redescend en dessinant une courbe parfaitement symétrique. Cette courbe, c'est une parabole, la courbe d'un trinôme.

- Le **sommet** du jet, c'est le maximum (ou le minimum) du trinôme.
- Les endroits où l'eau **touche le bassin**, ce sont les racines : les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.
- Selon la hauteur de la fontaine, le jet peut toucher le bassin en deux points, en un seul point (il l'effleure), ou jamais. C'est le **discriminant** Δ qui le dit.

01 Fonction trinôme et parabole

Une fonction **polynôme du second degré** (ou trinôme) s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Sa courbe est une **parabole** :

- tournée vers le haut si $a > 0$ (un bol), vers le bas si $a < 0$ (le jet d'eau) ;
- de sommet $S(\alpha\,;\beta)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$;
- symétrique par rapport à la droite $x = \alpha$.

La forme canonique

Tout trinôme s'écrit sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. C'est la **forme canonique**. Elle donne directement le sommet.

Exemple : $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$. Le sommet est $S(3\,;-4)$.

Le discriminant et les racines

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/second-degre/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

- Si $\Delta > 0$: deux racines, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Factorisation : $a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$: une racine double, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Factorisation : $a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$: aucune racine réelle, pas de factorisation.

Le jet d'eau : $\Delta > 0$, il touche le bassin en deux points ; $\Delta = 0$, il l'effleure en un seul point (le sommet est sur le bassin) ; $\Delta < 0$, il ne l'atteint jamais.

Quand on connaît une racine évidente (1, -1, 2…), on peut trouver l'autre avec le **produit des racines** : $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$. Et la somme vaut $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Le signe d'un trinôme

- Si $\Delta > 0$: $f(x)$ est du **signe de** a à l'extérieur des racines, et du **signe contraire** entre les racines.
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a, et s'annule en x_0.
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est toujours du signe de a.

Retour au problème

$h(x) = -5x^2 + 10x + 15$, avec $a = -5, b = 10, c = 15$.

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-5) \times 15 = 100 + 300 = 400 \qquad \text{deux racines}$$
$$x_1 = \frac{-10 - 20}{-10} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + 20}{-10} = -1$$
$$\alpha = -\frac{10}{2 \times (-5)} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = h(1) = 20 \qquad \text{le sommet}$$

La balle monte à 20 mètres au bout d'une seconde, et retombe au sol au bout de 3 secondes (la racine -1 n'a pas de sens ici, le temps est positif).

Au-dessus de 15 m : $h(x) > 15 \iff -5x^2 + 10x > 0 \iff -5x(x - 2) > 0$. Le trinôme est du signe contraire de a (donc positif) entre ses racines 0 et 2 : pendant 2 secondes.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/second-degre/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits