PREMIÈRE / EXERCICES CORRIGÉS

Le produit scalaire

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Avec les coordonnées

●○○ Application

Dans un repère orthonormé, $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $C(2\,;5)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Indice

Calcule d'abord les coordonnées des vecteurs.

Les vecteurs

$\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;3)$.

Question 1

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times1+1\times3=6$.

Question 2

Le produit scalaire n'est pas nul, donc le triangle n'est pas rectangle en A.

Ex. 2 Calculer un angle

●●○ Méthode

On reprend $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;3)$. Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.

Indice

Utilise les deux formules du produit scalaire, coordonnées et cosinus.

Les normes

$AB=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Le cosinus

$6 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \cos \widehat{BAC}$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

← *deux formules, un même nombre*

Conclusion

$\widehat{BAC} \approx 53{,}1°$.

Ex. 3 Avec une projection ●●○ Méthode

$ABCD$ est un carré de côté 4, et I est le milieu de $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Indice

Projette I sur la droite (AB).

L'ombre de I

Le projeté orthogonal de I sur (AB) est B, car $(IB) \perp (AB)$.

← *la lampe éclaire à la verticale*

Premier produit

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 16$.

Second produit

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$: $\overrightarrow{AD}$ n'a pas d'ombre sur (AB).

Ex. 4 Al-Kashi ●●○ Application

Dans un triangle ABC, $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer l'angle $\hat{A}$.

Indice

$\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ avec $a = BC$.

La formule

$\cos \hat{A} = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7} = \frac{25+49-64}{70} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$.

Conclusion

$\hat{A} \approx 81{,}8°$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Ex. 5 Équation d'une droite ●●○ Méthode

Déterminer une équation de la droite d passant par $A(2\,;-1)$ et perpendiculaire à la droite (BC), avec $B(0\,;3)$ et $C(4\,;1)$.

Indice

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à d.

Le vecteur normal

$\overrightarrow{BC}(4\,;-2)$ est normal à d, donc $d : 4x - 2y + c = 0$.

On trouve c

$A \in d$, donc $8 + 2 + c = 0$ et $c = -10$.

Conclusion

$d : 4x - 2y - 10 = 0$, ou en simplifiant par 2 : $2x - y - 5 = 0$.

Ex. 6 Cercle de diamètre donné ●●● Type bac

Soit $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;4)$.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ en utilisant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. En déduire son centre et son rayon.
3. Le point $E(0\,;5)$ est-il sur $\mathcal{C}$?

Indice

Avec $M(x\,;y)$, développe le produit scalaire, puis fais apparaître des carrés.

Question 1

$\overrightarrow{MA}(-1-x\,;2-y)$, $\overrightarrow{MB}(3-x\,;4-y)$. Le produit vaut $(-1-x)(3-x)+(2-y)(4-y) = x^2 - 2x - 3 + y^2 - 6y + 8$. Donc $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

Question 2

$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$. Centre $(1\,;3)$, le milieu de $[AB]$, et rayon $\sqrt{5}$.

← on retrouve le milieu

Question 3

$(0-1)^2 + (5-3)^2 = 1 + 4 = 5$, donc E est sur le cercle.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits