PREMIÈRE / COURS

Le produit scalaire

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Comment savoir si deux droites sont **perpendiculaires** sans rapporteur ? Comment calculer un angle d'un triangle quand on connaît ses trois côtés ? Comment trouver l'équation d'un cercle ?

Un seul outil répond à ces trois questions : le **produit scalaire**, une façon de « multiplier » deux vecteurs pour obtenir un nombre.

01 L'idée : la lampe et l'ombre

Pose un vecteur u au sol, comme une règle. Au-dessus, une lampe éclaire **à la verticale**. Un second vecteur v, penché, projette son **ombre** sur la règle.

Le produit scalaire $u \cdot v$, c'est la longueur de u multipliée par la longueur de cette ombre :

- si l'ombre va dans le même sens que u, le produit est **positif** ;
- si elle va dans le sens opposé, il est **négatif** ;
- si v est debout, à la verticale, il n'a **pas d'ombre** : le produit est nul. C'est le signe que les vecteurs sont orthogonaux.

01 Les quatre formules

Projection. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, soit $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AH}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-AB \times AH$ sinon.

Cosinus. $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos(u, v)$.

Coordonnées (repère orthonormé). Si $u(x\,;y)$ et $v(x'\,;y')$: $u \cdot v = xx' + yy'$.

Normes. $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$.

Le choix de la formule dépend des données : une figure avec des angles, la formule du cosinus ; un repère, les coordonnées ; un projeté visible, la projection.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Propriétés

- **Symétrie** : $u \cdot v = v \cdot u$.
- **Bilinéarité** : $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ et $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$.
- $u \cdot u = \|u\|^2$.
- **Orthogonalité** : $u \perp v \iff u \cdot v = 0$.

On retrouve les identités remarquables : $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,u \cdot v + \|v\|^2$.

Le théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\hat{A}$ l'angle en A :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

C'est un Pythagore « généralisé » : si $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos\hat{A} = 0$ et on retrouve $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemple : $b = 5$, $c = 3$, $\hat{A} = 60^\circ$. Alors $a^2 = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \frac{1}{2} = 19$, donc $a = \sqrt{19} \approx 4{,}36$.

Équations de droites et de cercles

Vecteur normal. Un vecteur n non nul est **normal** à une droite s'il est orthogonal à un de ses vecteurs directeurs. La droite de vecteur normal $n(a\,;b)$ a une équation $ax + by + c = 0$.

Cercle. Le cercle de centre $\Omega(x_0\,;y_0)$ et de rayon r a pour équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Cercle de diamètre $[AB]$. C'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Le dernier résultat dit que, vu depuis n'importe quel point du cercle, un diamètre est vu sous un **angle droit**.

Exemple guidé

On donne $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $C(0\,;5)$. Montre que le triangle ABC est rectangle en A, puis donne une équation de son cercle circonscrit.

1. **Les vecteurs** : $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;3)$.
2. **Le produit scalaire** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux : le triangle est rectangle en A.
3. **Le cercle** : l'hypoténuse $[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit. Son centre est le milieu $\Omega(2\,;4)$, et $r^2 = \Omega B^2 = (4-2)^2 + (3-4)^2 = 5$.
4. **L'équation** : $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

On vérifie avec A : $(1-2)^2 + (2-4)^2 = 1 + 4 = 5$. Le point A est bien sur le cercle.

Retour au problème

Deux droites sont perpendiculaires quand le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul. Les trois côtés d'un triangle donnent un angle par Al-Kashi, et un cercle s'écrit $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Un seul outil, trois réponses.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/produit-scalaire/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits