PREMIÈRE / EXERCICES CORRIGÉS

Probabilités conditionnelles et indépendance

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Lire un tableau ●○○ Application

Dans un lycée de 500 élèves, 200 font du sport, dont 120 filles. Parmi les 300 qui ne font pas de sport, 140 sont des filles. On choisit un élève au hasard. S : « il fait du sport », F : « c'est une fille ».

1. Calculer $P(F)$ et $P_S(F)$.
2. Calculer $P_F(S)$.

Indice

Sachant S, on n'éclaire que les 200 sportifs.

Question 1

$P(F) = \frac{120+140}{500} = \frac{260}{500} = 0{,}52$ et $P_S(F) = \frac{120}{200} = 0{,}6$.

← *le projecteur sur les sportifs*

Question 2

$P_F(S) = \frac{120}{260} \approx 0{,}46$.

Conclusion

$P_S(F) = 0{,}6$ mais $P_F(S) \approx 0{,}46$: changer de projecteur change le résultat.

Ex. 2 Un arbre complet ●○○ Méthode

Une urne A contient 3 boules rouges et 2 noires, une urne B contient 1 rouge et 4 noires. On lance une pièce : pile, on tire dans A ; face, dans B. R : « la boule est rouge ».

1. Construire l'arbre.
2. Calculer $P(R)$.

Indice

Deux chemins mènent à R.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/probabilites-conditionnelles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

L'arbre

Premier niveau, $P(A) = P(B) = 0{,}5$. Second niveau, $P_A(R) = 0{,}6$, $P_A(\bar{R}) = 0{,}4$, $P_B(R) = 0{,}2$, $P_B(\bar{R}) = 0{,}8$.

Les chemins

$P(A \cap R) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$ et $P(B \cap R) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$.

Probabilités totales

$P(R) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

Ex. 3 Remonter l'arbre ●●○ Méthode

On reprend l'exercice précédent. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne A ?

Indice

On cherche $P_R(A)$, alors que l'arbre commence par A.

Ce qu'on cherche

On éclaire les boules rouges et on regarde la proportion qui vient de A, c'est $P_R(A)$.

← *on déplace le projecteur*

La formule

$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$.

Conclusion

Il y a 75 % de chances que la boule vienne de A.

Ex. 4 Indépendants ou pas ●●○ Application

On lance un dé équilibré. A : « le résultat est pair », B : « le résultat est inférieur ou égal à 2 », C : « le résultat est inférieur ou égal à 3 ». A et B sont-ils indépendants ? Et A et C ?

Indice

Compare $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

A et B

$A \cap B = \{2\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Indépendants.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/probabilites-conditionnelles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

A et C

$A \cap C = \{2\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ et $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Pas indépendants.

Conclusion

A et B sont indépendants, A et C ne le sont pas. On ne devine pas l'indépendance, on la calcule.

Ex. 5 Le test de dépistage ●●● Piège

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif chez 95 % des malades et chez 5 % des personnes saines.

1. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
2. Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

Indice

M « malade », T « positif ». On cherche $P_T(M)$.

Les chemins

$P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019$ et $P(\bar{M} \cap T) = 0{,}98 \times 0{,}05 = 0{,}049$.

Question 1

$P(T) = 0{,}019 + 0{,}049 = 0{,}068$.

Question 2, le piège

On pourrait répondre 0,95. Mais 0,95 est $P_M(T)$, la probabilité d'être positif quand on est malade. On cherche l'inverse.

← on éclaire les positifs

Conclusion

$P_T(M) = \frac{0{,}019}{0{,}068} \approx 0{,}28$. Un test positif ne donne qu'environ 28 % de chances d'être malade.

Ex. 6 Un jeu, espérance ●●○ Type bac

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. As : on gagne 10 €. Figure (roi, dame, valet) : on gagne 2 €. Sinon, on perd 3 €. X est le gain.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il favorable ?

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/probabilites-conditionnelles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Indice

4 as, 12 figures et 16 autres cartes.

Question 1

$P(X=10)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$, $P(X=2)=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$, $P(X=-3)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$.

Question 2

$E(X)=\frac{1}{8}\times 10+\frac{3}{8}\times 2-\frac{1}{2}\times 3=1{,}25+0{,}75-1{,}5=0{,}5$.

Conclusion

$E(X)=0{,}5$ €, le jeu est favorable au joueur : il gagne en moyenne 50 centimes par partie.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/probabilites-conditionnelles/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits