PREMIÈRE / EXERCICES CORRIGÉS

La fonction exponentielle

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Simplifier ●○○ Application

Simplifier.

1. $A = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-1}$
2. $B = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^2}$
3. $C = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2$

Indice

Question 3, identité remarquable, et $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1$.

Question 1

$A = \mathrm{e}^{4-1} = \mathrm{e}^3$.

Question 2

$B = \mathrm{e}^{3x-x-2} = \mathrm{e}^{2x-2}$.

Question 3

$C = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}$.

← *e^x × e^-x = e^0 = 1*

Ex. 2 Équations et inéquations ●○○ Méthode

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $\mathrm{e}^{x^2-3} = \mathrm{e}^{-2x}$
2. $\mathrm{e}^{5x-2} < 1$

Indice

$1 = \mathrm{e}^0$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/fonction-exponentielle/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Question 1

$x^2 - 3 = -2x \iff x^2 + 2x - 3 = 0$. $\Delta = 16$, les solutions sont 1 et -3.

Question 2

$e^{5x-2} < e^0 \iff 5x - 2 < 0 \iff x < \frac{2}{5}$.

← *exp est strictement croissante*

Ex. 3 Dériver avec l'exponentielle ●●○ Application

Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3e^{2x} - 5x$
2. $g(x) = (x^2 + 1)e^x$
3. $h(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

Indice

Produit et quotient. Factorise par e^x à la fin.

Question 1

$f'(x) = 6e^{2x} - 5$.

Question 2

$g'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x = (x + 1)^2 e^x$.

Question 3

$h'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$.

← *on reconnaît (x - 1)²*

Ex. 4 Étude de variations ●●○ Méthode

Soit $f(x) = (2x - 4)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f.

Indice

$f'(x)$ est du signe de son facteur affine.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/fonction-exponentielle/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Question 1

$f'(x) = 2\mathrm{e}^x + (2x-4)\mathrm{e}^x = (2x-2)\mathrm{e}^x$.

Le signe

$\mathrm{e}^x > 0$, donc f' est du signe de $2x-2$, négatif avant 1, positif après.

← *l'exponentielle ne change jamais le signe*

Question 2

f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$, croissante sur $[1\,;+\infty[$, avec un minimum $f(1) = -2\mathrm{e}$.

Ex. 5 Le piège de la somme ●●○ Piège

Un élève écrit : « $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$ ». A-t-il raison ? Tester avec $x = 0$, puis corriger.

Indice

Que vaut chaque membre pour $x = 0$?

Le test

Pour $x = 0$, à gauche $1 + 1 = 2$, à droite $\mathrm{e}^0 = 1$. L'égalité est fausse.

L'erreur

L'élève a confondu avec $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$.

La correction

$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$, comme $a + a = 2a$.

Ex. 6 Médicament dans le sang ●●● Type bac

La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est $C(t) = 20t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, pour $t \geq 0$ en heures.

1. Montrer que $C'(t) = (20 - 10t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
2. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Donner cette concentration à $0{,}1$ près.

Indice

Dérivée d'un produit avec $u = 20t$ et $v = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

Question 1

$C'(t) = 20\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 20t \times (-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t} = (20 - 10t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/fonction-exponentielle/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Le signe

$C'(t)$ est du signe de $20 - 10t$, positif sur $[0\,;2]$, négatif ensuite.

Question 2

La concentration est maximale au bout de 2 heures, et vaut $C(2) = 40\mathrm{e}^{-1} \approx 14{,}7$ mg/L.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/fonction-exponentielle/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits