PREMIÈRE / COURS

La fonction exponentielle

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une pâte à pain lève : plus elle est grosse, plus elle gonfle vite. Une population de bactéries grandit : plus il y a de bactéries, plus il en naît. Dans ces situations, la **vitesse de croissance est proportionnelle à la quantité**. Quelle fonction décrit ce phénomène ?

01 L'idée : la pâte qui lève

Imagine une pâte magique dont la vitesse de gonflement est **exactement égale** à sa taille. Quand elle fait 1 litre, elle gonfle d'1 litre par heure ; quand elle fait 3 litres, de 3 litres par heure.

En langage mathématique : une fonction égale à sa propre dérivée, $f' = f$. Avec, au départ, une taille de 1 : $f(0) = 1$. Cette fonction, c'est l'exponentielle.

01 La définition

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. C'est la fonction **exponentielle**, notée $\exp$.

On note $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718$, et $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

01 Les règles de calcul

Pour tous réels a et b et tout entier n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \quad \text{la somme devient un produit}$$
$$\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$$
$$\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$$
$$(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$$

Ce sont les mêmes règles que pour les puissances : e^x se manipule comme « e puissance x ».

Signe et variations

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x > 0$, donc l'exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Conséquences : $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$ et $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/fonction-exponentielle/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

La pâte n'a jamais un volume nul ou négatif, et elle ne fait que gonfler. Valeurs à retenir : $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^x > 1$ si $x > 0$, $0 < \mathrm{e}^x < 1$ si $x < 0$.

La fonction e^{kx}

Pour tout réel k, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx} \qquad \left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a\,\mathrm{e}^{ax+b}$$

- Si $k > 0$, e^{kx} est croissante : c'est une croissance (la pâte qui lève).
- Si $k < 0$, e^{kx} est décroissante : c'est une décroissance (un médicament éliminé, un corps qui refroidit).

Lien avec les suites géométriques

Pour tout entier n, $\mathrm{e}^{na} = \left(\mathrm{e}^a\right)^n$. La suite $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est donc **géométrique** de raison e^a : l'exponentielle est la version « continue » de la photocopieuse des suites géométriques.

Résoudre

Exemple : $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+3}$. Comme l'exponentielle est strictement croissante, $2x - 1 = x + 3$, soit $x = 4$.

Exemple : $\mathrm{e}^{x^2} \geq \mathrm{e}^4$. On compare les exposants : $x^2 \geq 4$, soit $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

Exemple guidé

Étudie les variations de $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. **Dériver un produit** : avec $u = x - 1$ et $v = \mathrm{e}^x$, on a $u' = 1$ et $v' = \mathrm{e}^x$. Donc $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$.
2. **Le signe** : $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x, donc $f'(x)$ a le signe de x.
3. **Les variations** : f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
4. Le minimum vaut $f(0) = (0-1) \times \mathrm{e}^0 = -1$.

C'est la méthode type : on factorise par e^x, qui est toujours positif, et il ne reste qu'un facteur simple à étudier.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/fonction-exponentielle/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits