PREMIÈRE / EXERCICES CORRIGÉS

La dérivation

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Nombre dérivé par la définition

●○○ Méthode

Soit $f(x) = x^2 + 3x$. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$, puis en déduire $f'(2)$.

Indice

Développe $f(2 + h)$, puis simplifie par h.

Les valeurs

$f(2 + h) = 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h = 10 + 7h + h^2$ et $f(2) = 10$.

Le taux

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{7h+h^2}{h} = 7 + h.$

← *on zoome, h tend vers 0*

Conclusion

Quand $h \to 0$, $7 + h \to 7$, donc $f'(2) = 7$.

Ex. 2 Calculer des dérivées

●○○ Application

Dériver les fonctions suivantes.

1. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$
2. $g(x) = \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $h(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$

Indice

Question 3, formule du produit.

Question 1

$f'(x) = 12x^2 - 10x + 2.$

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Question 2

$g'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Question 3

$u = 2x - 1, u' = 2, v = x^2 + 3, v' = 2x$. $h'(x) = 2(x^2 + 3) + (2x - 1) \times 2x = 6x^2 - 2x + 6$.

← *u'v + uv'*

Ex. 3 La dérivée d'un quotient ●●○ Application

Dériver $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ sur $]3\,;+\infty[$ et en déduire ses variations.

Indice

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

La dérivée

$f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x+1)\times 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$.

Le signe

Le numérateur vaut $-7 < 0$ et le dénominateur est un carré, positif. Donc $f'(x) < 0$.

Conclusion

f est décroissante sur $]3\,;+\infty[$.

Ex. 4 Équation de tangente ●●○ Méthode

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Indice

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$.

Les valeurs

$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$; $f'(x) = 3x^2 - 2$, donc $f'(1) = 1$.

La formule

$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1 \times (x - 1) + 0$.

Conclusion

La tangente a pour équation $y = x - 1$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Ex. 5 Le piège du signe ●●○ Piège

On donne la courbe d'une fonction f qui reste sous l'axe des abscisses sur $[0\,;4]$ mais qui monte de -5 à -1. Un élève dit : « f est négative, donc f' est négative. » A-t-il raison ?

Indice

Qu'est-ce qui donne le signe de f' ?

La confusion

L'élève confond le signe de f (au-dessus ou en dessous de l'axe) et le signe de f' (la courbe monte ou descend).

À la loupe

La courbe monte, donc ses tangentes montent, leurs pentes sont positives.

← *on regarde si ça monte*

Conclusion

L'élève a tort, $f' \geq 0$ sur $[0\,;4]$ même si $f < 0$.

Ex. 6 Optimisation ●●● Type bac

On veut fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque carrée de 12 cm de côté, en découpant un carré de côté x cm à chaque coin, puis en relevant les bords. Le volume est $V(x) = x(12-2x)^2$ pour $x \in [0\,;6]$.

1. Montrer que $V'(x) = 12(x-2)(x-6)$.
2. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Quel est ce volume ?

Indice

Développe $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

Question 1

$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, donc $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$.

Le signe

Sur $[0\,;6]$, $x - 6 \leq 0$. Donc $V'(x) \geq 0$ sur $[0\,;2]$ et $V'(x) \leq 0$ sur $[2\,;6]$.

← *la tangente est horizontale en 2*

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Question 2

V est croissante puis décroissante, le volume est maximal pour $x = 2$ cm, et vaut $V(2) = 2 \times 8^2 = 128$ cm³.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits