PREMIÈRE / COURS

La dérivation

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une voiture parcourt $d(t) = t^2$ mètres en t secondes. Sa vitesse **moyenne** entre 2 s et 4 s se calcule facilement : $\frac{16-4}{4-2} = 6$ m/s. Mais quelle est sa vitesse **exactement** à l'instant $t = 3$, celle qu'affiche le compteur ?

Sur un graphique, c'est la même question : une courbe n'est pas droite, alors quelle est sa **pente** en un point précis ?

01 L'idée : la loupe

Prends une courbe bien lisse et regarde-la à la loupe autour d'un point. Zoome encore. Et encore. À force de zoomer, la courbe ressemble de plus en plus à une droite.

Cette droite, c'est la **tangente** à la courbe en ce point. Sa pente, c'est le nombre dérivé. C'est la vitesse instantanée de la voiture, la pente de la route sous tes pieds.

01 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est la pente de la sécante :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f est **dérivable en** a si ce taux tend vers un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

Faire tendre h vers 0, c'est zoomer avec la loupe : les deux points de la sécante se rapprochent jusqu'à se confondre.

Pour la voiture, en $a = 3$:

$$\frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \longrightarrow 6 \quad \text{quand } h \to 0$$

La vitesse instantanée à $t = 3$ est $d'(3) = 6$ m/s.

La tangente

Si f est dérivable en a, la **tangente** à la courbe au point d'abscisse a est la droite passant par $A(a\,;f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est :

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Sur un graphique, on lit $f'(a)$ comme la pente de la tangente : « on avance de 1, on monte de $f'(a)$ ».

La fonction dérivée et les formules

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f.

Fonction	Dérivée	Sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 1$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

Opérations. Pour u et v dérivables et k réel :

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (ku)' = ku' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Et $\big(f(ax+b)\big)' = a\,f'(ax+b)$.

Dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geq 0$ sur I (s'annulant en des points isolés), f est **croissante** sur I.
- Si $f' \leq 0$ sur I, f est **décroissante** sur I.
- Si f' s'annule **en changeant de signe** en a, f admet un **extremum local** en a.

À la loupe : si la tangente monte, la courbe monte. Au sommet d'une colline, la tangente est horizontale, $f'(a) = 0$.

La méthode complète

Pour $f(x) = x^3 - 3x$ (le signe de f' se lit avec le second degré) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) && \text{on dérive et on factorise} \\ f'(x) &> 0 \text{ si } x < -1 \text{ ou } x > 1 && \text{signe d'un trinôme} \\ f(-1) &= 2 \quad \text{et} \quad f(1) = -2 && \text{les extremums} \end{aligned}$$

f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;1]$, croissante sur $[1\,;+\infty[$. Maximum local 2 en -1, minimum local -2 en 1.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/premiere/derivation/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits