MATHS EXPERTES / FICHE DE RÉVISION

PGCD, Bézout et Gauss

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

L'image. Un carrelage : le plus grand carreau qui pave un mur sans découpe, c'est le PGCD des deux côtés.

01 PGCD et Euclide

- $a = bq + r \Rightarrow \mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(b\,;r)$.
- Le PGCD est le **dernier reste non nul**.
- Premiers entre eux : $\mathrm{PGCD} = 1$.

Les deux théorèmes

Théorème	Énoncé
Bézout	$\mathrm{PGCD}(a\,;b) = 1 \iff \exists\, u, v : au + bv = 1$
Gauss	$a \mid bc$ et $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = 1 \Rightarrow a \mid c$
Fermat	p premier, $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\ [p]$

03 Équation $ax + by = c$

1. Solution particulière $(x_0\,;y_0)$.
2. $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$.
3. Gauss : $x = x_0 + bk, y = y_0 - ak$ (si a, b premiers entre eux).

04 Les pièges

- Gauss exige « premiers entre eux ».
- $au + bv = 3$ ne prouve pas que le PGCD vaut 3.
- Toujours vérifier la solution particulière.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/pgcd-bezout-gauss/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits