MATHS EXPERTES / EXERCICES CORRIGÉS

PGCD, théorème de Bézout et théorème de Gauss

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Algorithme d'Euclide

●○○ Application

Calculer $\mathrm{PGCD}(1078\,;322)$ avec l'algorithme d'Euclide.

Indice

Divise le plus grand par le plus petit, puis recommence avec le reste.

Les divisions

$1078 = 322 \times 3 + 112$, $322 = 112 \times 2 + 98$, $112 = 98 \times 1 + 14$, $98 = 14 \times 7 + 0$.

Conclusion

Le dernier reste non nul est 14 : $\mathrm{PGCD}(1078\,;322) = 14$.

Ex. 2 Trouver des coefficients de Bézout

●●○ Méthode

Montrer que 17 et 5 sont premiers entre eux, puis trouver u et v entiers tels que $17u + 5v = 1$.

Indice

Écris l'algorithme d'Euclide, puis remonte-le.

Euclide

$17 = 5 \times 3 + 2$, $5 = 2 \times 2 + 1$. Le PGCD vaut 1.

On remonte

$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(17 - 5 \times 3) = 7 \times 5 - 2 \times 17$.

Conclusion

$u = -2, v = 7$. Vérification : $-34 + 35 = 1$.

Ex. 3 Reste avec Fermat

●●○ Application

Déterminer le reste de la division de 3^{100} par 7.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/pgcd-bezout-gauss/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Indice

7 est premier et ne divise pas 3.

Fermat

7 est premier, donc $3^6 \equiv 1\ [7]$.

L'exposant

$100 = 6 \times 16 + 4$, donc $3^{100} \equiv 3^4 = 81 \equiv 4\ [7]$.

← 81 = 7 × 11 + 4

Conclusion

Le reste est 4.

Ex. 4 Une équation diophantienne ●●● Type bac

On considère l'équation (E) : $7x - 5y = 3$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que $(4\,;5)$ est solution de (E).
2. Résoudre (E).

Indice

Soustrais l'égalité vérifiée par $(4\,;5)$ et utilise Gauss.

Question 1

$7 \times 4 - 5 \times 5 = 28 - 25 = 3$.

Soustraction

Si $7x - 5y = 3$, alors $7(x-4) = 5(y-5)$.

Gauss

5 divise $7(x-4)$ et 5 est premier avec 7, donc 5 divise $x-4$: $x = 4 + 5k$. En remplaçant, $7 \times 5k = 5(y-5)$, soit $y = 5 + 7k$.

Conclusion

Les solutions sont $(4+5k\,;5+7k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/pgcd-bezout-gauss/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits