MATHS EXPERTES / COURS

PGCD, théorème de Bézout et théorème de Gauss

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Un mur de salle de bain mesure 126 cm sur 90 cm. On veut le couvrir de carreaux **carrés**, tous identiques, les plus grands possible, sans en découper aucun. Quelle taille choisir ?

01 L'idée : le carrelage

Un carreau de côté c convient si c divise 126 **et** 90. Le plus grand, c'est le **plus grand diviseur commun**.

Pour le trouver sans lister tous les diviseurs, on découpe le rectangle : on y place le plus grand carré possible (90×90), il reste un rectangle 90×36. On recommence avec lui, jusqu'à ce qu'il ne reste **plus rien**. Le dernier carré posé est le carreau cherché. C'est exactement l'**algorithme d'Euclide**.

01 Le PGCD

Le **PGCD** de deux entiers a et b non tous deux nuls, noté $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$, est le plus grand entier qui divise à la fois a et b.

Algorithme d'Euclide : si $a = bq + r$ (division euclidienne), alors $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(b\,;r)$. On répète : **le PGCD est le dernier reste non nul**.

a et b sont **premiers entre eux** si $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = 1$.

Tout diviseur commun de a et b divise leur PGCD.

01 Théorème de Bézout

a et b sont premiers entre eux $\iff$ il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Plus généralement, il existe toujours u, v avec $au + bv = \mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

Pour **trouver** u et v, on remonte l'algorithme d'Euclide. Avec 17 et 5 : $17 = 5 \times 3 + 2$ puis $5 = 2 \times 2 + 1$. Donc $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(17 - 5 \times 3) = 7 \times 5 - 2 \times 17$.

Théorème de Gauss

Si $a \mid bc$ et si a et b sont **premiers entre eux**, alors $a \mid c$.

Conséquence : si a et b sont premiers entre eux et divisent tous deux n, alors $ab \mid n$.

Équation $ax + by = c$ (équation diophantienne) :

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/pgcd-bezout-gauss/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

1. trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$;
2. soustraire : $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$;
3. appliquer Gauss (après avoir divisé par le PGCD) pour obtenir toutes les solutions.

Nombres premiers et petit théorème de Fermat

Un entier $p \geq 2$ est **premier** s'il a exactement deux diviseurs, 1 et p. Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon unique en produit de nombres premiers.

Petit théorème de Fermat : si p est premier et p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

Exemple : $3^6 \equiv 1 \ [7]$, donc les puissances de 3 modulo 7 tournent avec une période qui divise 6.

Retour au problème

On applique Euclide à 126 et 90 :

$$126 = 90 \times 1 + 36, \quad 90 = 36 \times 2 + 18, \quad 36 = 18 \times 2 + 0.$$

Le dernier reste non nul est 18. Les plus grands carreaux mesurent 18 cm de côté : il en faut $7 \times 5 = 35$.

La suite : les matrices. Pour revoir les restes et les congruences : divisibilité et congruences.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/pgcd-bezout-gauss/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits