MATHS EXPERTES / EXERCICES CORRIGÉS

Nombres complexes : la forme algébrique

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Calculs en forme algébrique ●○○ Application

Écrire sous forme algébrique.

1. $z_1 = (3 - 2i) + (-1 + 5i)$
2. $z_2 = (1 + 2i)(3 - i)$
3. $z_3 = (2 + 3i)^2$

Indice

Remplace i^2 par -1.

Questions 1 et 2

$z_1 = 2 + 3i$. $z_2 = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$.

Question 3

$z_3 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9$. Le carré de $3i$ vaut -9.

← *$i^2 = -1$*

Conclusion

$z_3 = -5 + 12i$.

Ex. 2 Un quotient ●○○ Méthode

Écrire $z = \dfrac{5}{2+i}$ puis $w = \dfrac{1+i}{1-i}$ sous forme algébrique.

Indice

Multiplie par le conjugué du dénominateur.

Le premier

$z = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{5} = 2 - i$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Le second

$w = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2}$, $w = i$.

← un quart de tour

Ex. 3 Équations ●●○ Application

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $2z + i = 3 - z$
2. $z^2 + 2z + 5 = 0$

Indice

Pour la 2, calcule Δ.

Question 1

$3z = 3 - i$, donc $z = 1 - \frac{1}{3}i$.

Question 2, le discriminant

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, et $\sqrt{16} = 4$.

Question 2, les solutions

$z = \frac{-2 \pm 4i}{2}$, soit $-1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

Ex. 4 Réel ou imaginaire pur ●●● Type bac

Pour $z = x + iy$ (x, y réels), on pose $Z = z^2 + \bar{z}$.

1. Exprimer $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ en fonction de x et y.
2. Déterminer les z pour lesquels Z est réel.

Indice

Développe $z^2 = (x + iy)^2$.

Question 1

$Z = x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy$. Donc $\mathrm{Re}(Z) = x^2 - y^2 + x$ et $\mathrm{Im}(Z) = 2xy - y = y(2x - 1)$.

Question 2

Z réel $\iff y(2x - 1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Conclusion

Z est réel quand z est réel, ou quand $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits