MATHS EXPERTES / COURS

Nombres complexes : la forme algébrique

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

L'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ a un discriminant négatif : $\Delta = -36$. En Première, on concluait « pas de solution ». Et si on inventait des nombres dont le carré est négatif ?

01 L'idée : le quart de tour

Sur la droite des réels, multiplier par -1, c'est faire un **demi-tour** autour de 0 : 3 devient -3.

Imagine un nombre i qui fait **un quart de tour**. Deux quarts de tour font un demi-tour, donc $i \times i = -1$. On quitte la droite pour tourner dans le **plan** : c'est là que vivent les nombres complexes.

01 Le nombre i et la forme algébrique

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$, et un nombre i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$. On y calcule avec les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.

Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + i\,b$ avec a et b réels : c'est la **forme algébrique**.

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la **partie réelle** ;
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la **partie imaginaire**.

Si $b = 0$, z est réel ; si $a = 0$, z est **imaginaire pur**.

Deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont **même partie réelle et même partie imaginaire**.

Calculer

On développe comme d'habitude, puis on remplace i^2 par -1 :

$$(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i.$$

Le conjugué

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

- $z\,\bar{z} = a^2 + b^2$, un **réel positif** ;
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$;
- z est réel $\iff \bar{z} = z$; imaginaire pur $\iff \bar{z} = -z$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Diviser : on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur, qui devient réel.

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+4i-8}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i.$$

Équations du second degré

Pour $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c **réels** et $\Delta = b^2-4ac$:

- $\Delta > 0$: deux solutions réelles $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $\Delta = 0$: une solution réelle $-\frac{b}{2a}$;
- $\Delta < 0$: **deux solutions complexes conjuguées** $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Retour au problème

$\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$, et $\sqrt{-\Delta} = 6$.

$$z_1 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i \qquad z_2 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$$

Les solutions sont $2-3i$ et $2+3i$, conjuguées l'une de l'autre. Le quart de tour a donné des solutions là où il n'y en avait pas.

La suite, avec la géométrie du quart de tour : Nombres complexes et géométrie.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits