MATHS EXPERTES / COURS

Nombres complexes et géométrie

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Calculer $(1+i)^{10}$ en développant serait interminable. Pourtant, ça se fait de tête en une ligne. Comment ?

01 L'idée : la boussole qui tourne et qui zoome

Dans le chapitre forme algébrique, i était un quart de tour. Plus généralement, chaque complexe est une **flèche** partant de l'origine, décrite par deux réglages, comme une aiguille de boussole :

- sa **longueur**, le **module** ;
- sa **direction**, l'**argument** (un angle).

Multiplier deux complexes, c'est **multiplier les longueurs** (zoomer) et **additionner les angles** (tourner). Élever à la puissance 10, c'est zoomer 10 fois et tourner 10 fois.

01 Le plan complexe

Dans un repère orthonormé direct $(O\,;u,v)$, le point $M(a\,;b)$ a pour **affixe** $z=a+ib$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A.

- Le **module** $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=OM$; et $AB=|z_B-z_A|$.
- Un **argument** $\arg(z)$, pour $z\neq 0$, est une mesure de l'angle $(u,\overrightarrow{OM})$, défini à 2π près.

01 Formes trigonométrique et exponentielle

Si $|z|=r$ et $\arg(z)=\theta$, alors $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$ et

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,e^{i\theta}.$$

Règles : $|zz'|=|z|\,|z'|$ et $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$; $e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$.

Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$, soit $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Exemple : $1+i\sqrt{3}$ a pour module $\sqrt{1+3}=2$, et $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta=\frac{\pi}{3}$: $1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}$.

Racines n-ièmes de l'unité

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-et-geometrie/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Les solutions de $z^n = 1$ sont les n nombres $e^{2ik\pi/n}$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Leurs points forment un **polygone régulier** à n sommets inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. Leur somme est nulle (pour $n \geq 2$).

Exemple : les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2, sommets d'un triangle équilatéral, avec $1 + j + j^2 = 0$.

Géométrie

- **Distance** : $AB = |z_B - z_A|$.
- **Angle orienté** : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
- $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ réel $\iff$ A, B, C alignés ; imaginaire pur $\iff$ $(AB) \perp (AC)$.

Retour au problème

$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Avec Moivre :

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\, e^{i\,10\pi/4} = 32\, e^{i\,5\pi/2} = 32\, e^{i\pi/2} = 32i$$

$(1+i)^{10} = 32i$: on zoome 10 fois par $\sqrt{2}$, et on tourne 10 fois de 45°, soit 450°, c'est-à-dire un quart de tour.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/nombres-complexes-et-geometrie/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits