MATHS EXPERTES / EXERCICES CORRIGÉS

Matrices et suites de matrices

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Le produit n'est pas commutatif

●○○ Piège

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

Indice

Ligne de la première fois colonne de la seconde.

AB

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$: les colonnes de A sont échangées.

BA

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: ce sont les lignes qui sont échangées.

Conclusion

$AB \neq BA$: l'ordre du produit compte.

Ex. 2 Résoudre un système avec l'inverse

●●○ Méthode

Résoudre $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$ à l'aide d'une matrice inverse.

Indice

Écris $AX = B$, puis calcule $\det A$.

L'écriture matricielle

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\det A = 6 - 5 = 1$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/matrices/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

L'inverse

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

La solution

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 12 - 11 \\ -20 + 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Conclusion

$x = 1$ et $y = 2$. Vérification : $2 + 2 = 4$ et $5 + 6 = 11$.

Ex. 3 Puissance d'une matrice ●●○ Application

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecturer A^n, puis le démontrer par récurrence.

Indice

Calcule A^2 et A^3.

Conjecture

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation

Pour $n = 1$, c'est la matrice A.

Hérédité

$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion

Pour tout $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 4 Deux villes qui échangent leurs habitants ●●● Type bac

Chaque année, 10 % des habitants de A partent en B et 20 % de ceux de B partent en A. On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ les populations (en milliers) l'année n, avec $a_0 = 500$ et $b_0 = 400$.

1. Donner la matrice M telle que $U_{n+1} = MU_n$ et calculer U_1.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/matrices/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

2. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 900$.

Indice

Ceux qui restent en A, plus ceux qui arrivent de B.

La matrice

$a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}2b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}8b_n$, donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

U1

$a_1 = 450 + 80 = 530$ et $b_1 = 50 + 320 = 370$. Le total reste 900.

L'état stable

$a = 0{,}9a + 0{,}2b$ donne $0{,}1a = 0{,}2b$, soit $a = 2b$. Avec $a + b = 900$: $b = 300$.

Conclusion

L'état stable est 600 milliers en A et 300 milliers en B.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/matrices/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits