MATHS EXPERTES / COURS

Matrices et suites de matrices

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Deux villes échangent des habitants. Chaque année, 10 % des habitants de la ville A partent vivre en B, et 20 % de ceux de B partent en A. Au départ, A compte 500 milliers d'habitants et B 400 milliers. Les populations vont-elles se stabiliser ?

01 L'idée : le ticket de caisse

Au marché, tu achètes 3 kg de pommes à 2 € et 2 kg de poires à 4 €. Le marchand fait **quantités fois prix**, terme à terme, puis il **additionne** : $3 \times 2 + 2 \times 4 = 14$ €.

C'est exactement le **produit d'une ligne par une colonne**. Une matrice, c'est un ticket de caisse rangé dans un tableau : on peut faire tous les calculs d'un coup.

01 Les matrices

Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes. On note a_{ij} le coefficient de la ligne i, colonne j.

- **Somme** : on additionne coefficient par coefficient (même taille).
- **Produit par un réel** k : on multiplie chaque coefficient par k.
- **Produit** AB (si A a autant de colonnes que B a de lignes) : le coefficient $(i\,;j)$ de AB est le produit de la **ligne** i de A par la **colonne** j de B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

La matrice **identité** I_n (des 1 sur la diagonale, des 0 ailleurs) joue le rôle du nombre 1 : $AI_n = I_n A = A$.

Matrice inverse

A (carrée) est **inversible** s'il existe A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\det A = ad - bc$. Si $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/matrices/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Système linéaire : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$ s'écrit $AX = B$. Si A est inversible, la solution unique est $X = A^{-1}B$.

Puissances et suites de matrices

- $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n fois). Souvent, on conjecture A^n puis on le prouve **par récurrence**.
- Si $U_{n+1} = AU_n$, alors $U_n = A^n U_0$.
- Si $U_{n+1} = AU_n + B$, on cherche un **état stable** $L = AL + B$, puis $V_n = U_n - L$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

Retour au problème

On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Les départs donnent $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}2b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}8b_n$, soit $U_{n+1} = MU_n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Un état stable vérifie $a = 0{,}9a + 0{,}2b$, soit $a = 2b$. Comme la population totale reste 900 : $b = 300$ et $a = 600$.

Les populations tendent vers 600 milliers en A et 300 milliers en B (on admet ici que la suite converge).

La suite : graphes et chaînes de Markov. Pour revoir les systèmes : équations de droites et systèmes.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/matrices/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits