MATHS EXPERTES / EXERCICES CORRIGÉS

Graphes et chaînes de Markov

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Des degrés impossibles

Piège

Peut-on tracer un graphe à 5 sommets de degrés 3, 3, 3, 2 et 2 ? Et de degrés 3, 3, 2, 2, 2 ? Combien d'arêtes a-t-il alors ?

Indice

La somme des degrés vaut deux fois le nombre d'arêtes.

Premier cas

$3+3+3+2+2=13$ est impair : c'est impossible.

Second cas

$3+3+2+2+2=12$, pair.

Conclusion

Seul le second graphe peut exister, et il a 6 arêtes.

Ex. 2 Compter des chaînes

Méthode

Le graphe a pour sommets A, B, C, D et pour arêtes A–B, A–C, B–C et C–D.

1. Écrire sa matrice d'adjacence M (ordre A, B, C, D).
2. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 2 de A vers D ? De A vers A ?

Indice

Le coefficient de M^2 s'obtient en multipliant la ligne de A par la colonne voulue.

La matrice

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/graphes-et-chaines-de-markov/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

De A vers D

Ligne A fois colonne D : $0 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$. C'est la chaîne A–C–D.

De A vers A

$0 + 1 + 1 + 0 = 2$: A–B–A et A–C–A. 1 chaîne vers D, 2 vers A.

Ex. 3 Suivre un état probabiliste ●●○ Application

Avec $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ (états V puis B), Lina prend le vélo le jour 0. Calculer π_1 et π_2.

Indice

$\pi_0 = (1 \;\; 0)$ et $\pi_{n+1} = \pi_n P$.

Jour 1

$\pi_1 = (1 \;\; 0)P = (0{,}8 \;\; 0{,}2)$.

Jour 2

$\pi_2 = (0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4 \quad 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}6) = (0{,}72 \;\; 0{,}28)$.

Conclusion

Le jour 2, elle prend le vélo avec une probabilité de 0,72.

Ex. 4 Fidélité des abonnés ●●● Type bac

Chaque mois, un abonné d'une plateforme le reste avec une probabilité de 0,9. Un non-abonné s'abonne avec une probabilité de 0,3.

1. Donner la matrice de transition P (états abonné puis non abonné).
2. Déterminer l'état stable et l'interpréter.

Indice

Cherche $\pi = (x \;\; 1 - x)$ avec $\pi = \pi P$.

Question 1

$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, chaque ligne fait bien 1.

L'équation

$x = 0{,}9x + 0{,}3(1 - x)$, soit $0{,}4x = 0{,}3$ et $x = 0{,}75$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/graphes-et-chaines-de-markov/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Vérification

$0{,}75 \times 0{,}9 + 0{,}25 \times 0{,}3 = 0{,}675 + 0{,}075 = 0{,}75$.

Conclusion

L'état stable est $(0{,}75 \;\; 0{,}25)$: à long terme, 75 % des personnes sont abonnées.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/graphes-et-chaines-de-markov/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits