MATHS EXPERTES / EXERCICES CORRIGÉS

Divisibilité, division euclidienne et congruences

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

Ex. 1 Division euclidienne

●○○ Piège

Effectuer la division euclidienne de 158 par 9, puis de -23 par 6.

Indice

Le reste doit être positif et plus petit que le diviseur.

158 par 9

$158 = 9 \times 17 + 5$, quotient 17, reste 5.

-23 par 6

$-23 = 6 \times (-3) - 5$ ne convient pas (reste négatif). On écrit $-23 = 6 \times (-4) + 1$.

← *reste positif*

Conclusion

Quotient -4, reste 1.

Ex. 2 Un diviseur commun

●●○ Méthode

Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $3n + 13$.

Indice

$n + 2$ divise aussi $3(n + 2)$, donc une combinaison.

La combinaison

$n + 2$ divise $3n + 13$ et $3n + 6$, donc il divise leur différence, 7.

Les diviseurs de 7

$n + 2 \geq 2$, donc $n + 2 = 7$, soit $n = 5$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/divisibilite-et-congruences/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Vérification

$n = 5 : 3 \times 5 + 13 = 28 = 4 \times 7$.

Ex. 3 Reste d'une grande puissance

●●○ Application

Déterminer le reste de la division de 2^{100} par 7.

Indice

Cherche la première puissance de 2 congrue à 1 modulo 7.

Le cycle

$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$.

L'exposant

$100 = 3 \times 33 + 1$, donc $2^{100} = (2^3)^{33} \times 2 \equiv 2\ [7]$.

Conclusion

Le reste est 2.

Ex. 4 Un carré modulo 5

●●● Type bac

1. Dresser le tableau des restes de x^2 modulo 5.
2. En déduire que l'équation $x^2 = 5y + 3$ n'a pas de solution en nombres entiers.

Indice

Teste les cinq restes possibles de x.

Question 1

Pour $x \equiv 0, 1, 2, 3, 4$, on a $x^2 \equiv 0, 1, 4, 4, 1\ [5]$.

Question 2

Une solution donnerait $x^2 \equiv 3\ [5]$. Or 3 n'apparaît pas dans le tableau.

Conclusion

Aucun entier x ne convient, l'équation n'a pas de solution.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-expertes/divisibilite-et-congruences/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits