MATHS COMPLÉMENTAIRES / COURS

Suites et modèles d'évolution

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une ville compte 20 000 habitants et sa population augmente de 3 % par an. Au bout de combien d'années dépassera-t-elle 30 000 habitants ?

01 L'idée : la tirelire et la boule de neige

Dans une **tirelire**, tu glisses 10 € chaque semaine : tu **ajoutes** toujours la même somme. La tirelire grossit en ligne droite.

Une **boule de neige** qui roule, elle, grossit d'autant plus qu'elle est déjà grosse : elle est **multipliée** à chaque tour. Au début, elle semble lente, puis elle dépasse n'importe quelle tirelire.

La tirelire, c'est une suite **arithmétique**. La boule de neige, une suite **géométrique**.

01 Suites arithmétiques

(u_n) est **arithmétique** de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n.

- Terme général : $u_n = u_0 + nr$.
- Somme : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
- Modèle : évolution **linéaire** (on ajoute une quantité fixe).

01 Suites géométriques

(u_n) est **géométrique** de raison q si $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout n.

- Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$.
- Somme : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $(q \neq 1)$.
- Une évolution de $t\,\%$ correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$ (une baisse donne $q < 1$).

Limite : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, q^n tend vers $+\infty$. Si $0 < q < 1$, q^n tend vers 0.

Suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$: on cherche le nombre ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, puis $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.

Retour au problème

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/suites-et-modeles-d-evolution/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

La population vérifie $u_n = 20\,000 \times 1{,}03^n$. On cherche n tel que $1{,}03^n > 1{,}5$.

Avec le logarithme : $n > \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}03} \approx 13{,}7$. On vérifie : $1{,}03^{13} \approx 1{,}469$ et $1{,}03^{14} \approx 1{,}513$.

La population dépasse 30 000 habitants au bout de 14 ans.

La suite : dérivation et convexité. Pour revoir les bases : les suites de 1re.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/suites-et-modeles-d-evolution/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits