MATHS COMPLÉMENTAIRES / COURS

Lois de probabilité discrètes et continues

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une joueuse réussit 80 % de ses tirs au but. Elle en tire 5, de façon indépendante. Quelle est la probabilité qu'elle en marque au moins 4 ?

01 L'idée : la série de tirs au but

Chaque tir, c'est la même expérience, avec deux issues : **but** ou **raté**. Les tirs ne s'influencent pas. On ne s'intéresse qu'au **nombre de buts** à la fin de la série.

Pour compter, on imagine l'arbre de tous les tirs : chaque chemin avec 4 buts a la même probabilité, il suffit de compter **combien** il y en a. C'est tout le principe de la **loi binomiale**.

01 Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue. Si X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i :

- **espérance** : $E(X) = \sum p_i x_i$ (la moyenne sur un grand nombre d'expériences) ;
- **variance** : $V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$ et **écart type** $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

01 Loi binomiale

Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues : succès (probabilité p) et échec. On la répète n fois de façon **identique et indépendante** ; X compte les succès. Alors X suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n\,;p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

$\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins de l'arbre avec k succès (calculatrice).

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/lois-de-probabilite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Loi géométrique

On répète l'épreuve **jusqu'au premier succès** ; X est le rang de ce succès. Pour $k \geq 1$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{1}{p}.$$

Loi uniforme sur un intervalle

X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;b]$ si toutes les valeurs de l'intervalle sont « également probables ». Pour $[c\,;d] \subset [a\,;b]$:

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Retour au problème

X, le nombre de buts, suit $\mathcal{B}(5\,;0{,}8)$.

$$P(X \geq 4) = \binom{5}{4}0{,}8^4 \times 0{,}2 + 0{,}8^5 = 0{,}4096 + 0{,}32768 \approx 0{,}737.$$

Elle marque au moins 4 buts avec une probabilité d'environ 0,74. En moyenne, elle en marque $E(X) = 5 \times 0{,}8 = 4$.

La suite : les statistiques à deux variables. Pour aller plus loin : la loi binomiale de spécialité.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/lois-de-probabilite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits