MATHS COMPLÉMENTAIRES / COURS

Primitives, intégrales et calculs d'aires

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une voiture roule à 20 m/s et freine. Sa vitesse est $v(t) = 20 - 4t$ (en m/s), où $t \in [0\,;5]$ est en secondes. Quelle distance parcourt-elle avant de s'arrêter ?

01 L'idée : le compteur kilométrique

Sur le tableau de bord, il y a deux cadrans. Le **compteur de vitesse** dit à quelle allure tu roules, à chaque instant. Le **compteur kilométrique** accumule tout ce que tu as parcouru.

Passer de la vitesse à la distance, c'est **accumuler** : additionner « vitesse × petit temps » sur tout le trajet. Sur le graphique de la vitesse, ce cumul, c'est l'**aire sous la courbe**. C'est exactement une **intégrale**.

01 Primitives

F est une **primitive** de f si $F' = f$. Deux primitives diffèrent d'une constante.

$f(x)$	une primitive $F(x)$
k	kx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$\ln x$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$

Intégrale

Si f est continue sur $[a\,;b]$ et F en est une primitive :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

- Si $f \geq 0$, c'est l'**aire** (en unités d'aire) entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$.
- **Linéarité** : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b kf = k\int_a^b f$.
- **Chasles** : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

Valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/integrales-et-aires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Aire entre deux courbes : si $f \geq g$ sur $[a\,;b]$, l'aire vaut $\int_a^b (f-g)$.

Retour au problème

La vitesse s'annule en $t = 5$. Une primitive de v est $D(t) = 20t - 2t^2$, donc

$$\int_0^5 (20 - 4t)\,\mathrm{d}t = D(5) - D(0) = 100 - 50 = 50.$$

La voiture parcourt 50 mètres avant de s'arrêter. C'est l'aire du triangle sous la droite : $\frac{5 \times 20}{2} = 50$.

La suite : les lois de probabilité. Pour aller plus loin : l'intégration de spécialité.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/integrales-et-aires/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits