MATHS COMPLÉMENTAIRES / COURS

Fonction exponentielle et fonction logarithme

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Tu places 1 000 € à 4 % d'intérêts par an. Combien d'années faut-il attendre pour que ton capital **double** ?

01 L'idée : le nénuphar qui double

Sur un étang, un nénuphar double de surface chaque jour. Le jour 30, il couvre tout l'étang. Quand en couvrait-il la moitié ? Le jour 29, la veille !

L'**exponentielle**, c'est ce nénuphar : une croissance qui se **multiplie** à chaque étape. Le **logarithme** répond à la question inverse : **combien d'étapes** faut-il pour atteindre une taille donnée ? Il transforme les multiplications en additions, comme on compte les doublements.

01 La fonction exponentielle

$\exp$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, avec $e^0 = 1$. On note e^x, et $e \approx 2{,}718$.

- $e^x > 0$ pour tout x, et $\exp$ est **croissante**.
- $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $(e^a)^n = e^{na}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Modèles : $f(t) = Ce^{kt}$ est une croissance exponentielle si $k > 0$, une décroissance si $k < 0$.

Le logarithme népérien

Pour $y > 0$, $\ln y$ est l'unique réel x tel que $e^x = y$:

$$e^x = y \iff x = \ln y.$$

- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln$ est définie et croissante sur $]0\,;+\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Résoudre : $e^x = 5 \iff x = \ln 5$. Et $q^n > S$ (avec $q > 1$) $\iff n > \frac{\ln S}{\ln q}$.

Retour au problème

Le capital après n années vaut $1000 \times 1{,}04^n$. On cherche $1{,}04^n \geq 2$, soit $n \ln 1{,}04 \geq \ln 2$:

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/exponentielle-et-logarithme/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}04} \approx 17{,}7.$$

Le capital double au bout de 18 ans.

La suite : intégrales et calculs d'aires. Pour aller plus loin : le logarithme népérien de spécialité.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/exponentielle-et-logarithme/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits