MATHS COMPLÉMENTAIRES / COURS

Dérivation et convexité

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une vidéo devient virale. Le nombre de personnes qui l'ont vue, en milliers, est modélisé par $N(t) = -t^3 + 9t^2 + 2$, où $t \in [0\,;6]$ est le temps en jours. À quel moment la vidéo se répand-elle **le plus vite** ?

01 L'idée : la pédale d'accélérateur

En voiture, ta **position** avance, ta **vitesse** dit à quel rythme elle avance, et la pédale dit si la vitesse augmente ou diminue.

- La **dérivée** f', c'est la vitesse : elle dit si f monte ou descend.
- La **dérivée seconde** f'', c'est la pédale : pied appuyé, la vitesse augmente (fonction **convexe**) ; pied levé, elle diminue (fonction **concave**).
- Le moment où l'on **lève le pied**, c'est le **point d'inflexion**.

01 Dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Opérations : $(u+v)' = u' + v'$, $(ku)' = ku'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Variations et extremums

- Si $f' > 0$ sur un intervalle, f y est **croissante** ; si $f' < 0$, **décroissante**.
- Si f' s'annule **en changeant de signe** en a, f admet un **extremum** en a.

Convexité

- f est **convexe** si sa courbe est au-dessus de ses tangentes, ce qui revient à $f'' \geq 0$ (f' croissante).

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/derivation-et-convexite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

- f est **concave** si sa courbe est en dessous de ses tangentes : $f'' \leq 0$.
- Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente : f'' s'y annule **en changeant de signe**.

Retour au problème

La vitesse de propagation est $N'(t) = -3t^2 + 18t = 3t(6 - t)$, positive sur $[0\,;6]$: N est croissante.

$N''(t) = -6t + 18$ est positive avant 3 et négative après. N est convexe sur $[0\,;3]$, concave sur $[3\,;6]$: point d'inflexion en $t = 3$, avec $N'(3) = 27$.

La vidéo se répand le plus vite au bout de 3 jours, à 27 000 vues par jour. Ensuite, elle continue de monter, mais de moins en moins vite.

La suite : exponentielle et logarithme. Pour revoir les bases : la dérivation de 1re.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/maths-complementaires/derivation-et-convexite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits