ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE TLE / COURS

Transport de l'électricité, graphes et optimisation

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une centrale doit envoyer un courant de 100 A vers une ville. Deux lignes sont possibles : la ligne 1 de résistance $2\ \Omega$ et la ligne 2 de résistance $3\ \Omega$. Comment répartir le courant entre les deux lignes pour perdre le moins d'énergie possible ?

01 L'idée : le réseau de tuyaux

Imagine l'électricité comme de l'eau qui circule dans des tuyaux. Un tuyau étroit freine l'eau : c'est la **résistance**. À chaque carrefour, toute l'eau qui arrive repart : rien ne se crée, rien ne se perd.

Pour transporter beaucoup d'eau avec peu de frottements, on la répartit entre plusieurs tuyaux. Optimiser un réseau, c'est choisir la répartition qui minimise les pertes en respectant les carrefours.

01 Les pertes par effet Joule

Un câble de résistance R parcouru par un courant d'intensité I dissipe une puissance

$$P_J = R \times I^2$$

Pour transporter une puissance $P = U \times I$, on a $I = \frac{P}{U}$, donc $P_J = \frac{RP^2}{U^2}$: multiplier la tension par k divise les pertes par k^2. D'où les lignes à 400 000 V.

01 Modéliser le réseau par un graphe

- Les **sommets** sont les sources (centrales), les nœuds intermédiaires et les cibles (villes).
- Les **arcs** (flèches) sont les lignes, orientés dans le sens du courant.
- Chaque arc porte un **poids** : sa résistance, ou l'intensité qui y circule.

Contraintes. En chaque nœud, la somme des intensités entrantes égale la somme des intensités sortantes (loi des nœuds). Chaque source a une production maximale, chaque ville une demande à satisfaire.

Objectif. Minimiser la somme des pertes $\sum R_i I_i^2$.

Retour au problème

On note x l'intensité dans la ligne 1. La loi des nœuds impose $100 - x$ dans la ligne 2. Les pertes valent

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/ens-scientifique-terminale/transport-de-l-electricite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

$$f(x) = 2x^2 + 3(100 - x)^2 = 5x^2 - 600x + 30\,000$$

C'est un polynôme du second degré avec $a = 5 > 0$: son minimum est atteint en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{600}{10} = 60$.

Il faut 60 A dans la ligne 1 et 40 A dans la ligne 2, pour des pertes de $f(60) = 12\,000$ W. Tout faire passer par la ligne 1 donnerait $20\,000$ W.

Pour t'entraîner : les exercices corrigés. La suite : modèles démographiques. Pour revoir le second degré : second degré.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/ens-scientifique-terminale/transport-de-l-electricite/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits