5E / COURS

Parallélogrammes

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Une étagère pliante, un rideau de fer, une lampe d'architecte : leurs bras forment des quadrilatères qui se déforment sans jamais perdre leurs côtés parallèles. Comment prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme, et calculer son aire ?

01 L'idée : le rideau de fer

Le rideau de fer d'un magasin est fait de losanges articulés. Quand on le tire, ils s'aplatissent ou s'ouvrent, mais leurs côtés opposés restent toujours parallèles. Ce sont des parallélogrammes qui changent de forme sans changer de nature.

01 La définition

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les **côtés opposés sont parallèles deux à deux**. $ABCD$ est un parallélogramme si $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Le nom se lit dans l'ordre des sommets, en tournant : dans $ABCD$, A est opposé à C, et B à D.

01 Les propriétés

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :

- ses **diagonales se coupent en leur milieu** ;
- ses **côtés opposés ont la même longueur** ;
- ses **angles opposés ont la même mesure** ;
- deux **angles consécutifs** sont supplémentaires (leur somme fait 180°) ;
- il a un **centre de symétrie** : le point d'intersection des diagonales.

Reconnaître un parallélogramme

Pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffit de montrer **une** des propriétés suivantes :

- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux (définition) ;
- ses diagonales ont le même milieu ;
- ses côtés opposés ont la même longueur deux à deux (s'il n'est pas croisé) ;
- deux côtés opposés sont parallèles **et** de même longueur.

Les parallélogrammes particuliers

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/5e/parallelogrammes/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Figure	Propriété en plus
Rectangle	un angle droit
Losange	deux côtés consécutifs égaux
Carré	rectangle et losange

Le **rectangle** a des diagonales de même longueur ; le **losange** a des diagonales perpendiculaires ; le **carré** cumule tout.

L'aire

$\mathcal{A} = b \times h$ où b est la longueur d'un côté (la base) et h la **hauteur** relative à ce côté : la distance entre ce côté et le côté opposé, mesurée perpendiculairement.

Pourquoi ? On découpe un triangle d'un côté et on le recolle de l'autre : on obtient un rectangle de mêmes base et hauteur.

Exemple guidé

$ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O, avec $OA = OC = 4$ cm et $OB = OD = 3$ cm. De plus, $(AC) \perp (BD)$.

1. Les diagonales ont le même milieu O, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.
2. Ses diagonales sont perpendiculaires, donc c'est un **losange**.
3. Ses diagonales mesurent 8 cm et 6 cm : elles ne sont pas égales, ce n'est pas un carré.

Retour au problème

Dans le rideau de fer, les barres sont fixées en leur milieu et aux extrémités : chaque losange garde des côtés égaux, donc reste un parallélogramme, quelle que soit l'ouverture. Seule sa **hauteur** change, et donc son aire : plus on tire, plus il s'aplatit et plus l'aire diminue.

Les pièges

- L'aire n'est pas $\text{côté} \times \text{côté}$: il faut la **hauteur**, perpendiculaire à la base.
- Un parallélogramme n'a pas d'axe de symétrie en général, seulement un centre.
- Dans une démonstration, cite toujours la propriété utilisée.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/5e/parallelogrammes/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits