3E / COURS

Homothéties et rotations

Astrolab Cours · astrolabcours.fr

01 Le problème

Un vidéoprojecteur affiche une image de 30 cm de large sur un écran de 1,5 m. Par combien sont multipliées les longueurs, et par combien l'aire de l'image ? Et comment décrire le mouvement d'une nacelle de grande roue ?

01 L'idée : le vidéoprojecteur et la grande roue

Le vidéoprojecteur part d'un point, la lampe, et agrandit l'image : chaque point s'éloigne de la lampe en ligne droite, dans le même rapport. C'est une **homothétie**. Une nacelle de grande roue tourne autour de l'axe, en restant à la même distance du centre : c'est une **rotation**.

01 La rotation

Une **rotation** est définie par un **centre** O, un **angle** et un **sens** (horaire ou anti-horaire). L'image de M est le point M' tel que $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'}$ égal à l'angle donné, dans le sens donné.

Construire l'image d'un point : trace le cercle de centre O passant par M, puis, au rapporteur, l'angle voulu à partir de $[OM)$. M' est sur ce cercle.

La rotation **conserve** les longueurs, les angles, les aires et l'alignement : la figure tourne sans se déformer. Une rotation de 180° est une symétrie centrale.

01 L'homothétie

Une **homothétie** est définie par un **centre** O et un **rapport** k (non nul).

- Si $k > 0$: M' est sur la demi-droite $[OM)$, avec $OM' = k \times OM$.
- Si $k < 0$: M' est de l'autre côté de O, avec $OM' = |k| \times OM$.

- $|k| > 1$: c'est un **agrandissement**.
- $|k| < 1$: c'est une **réduction**.
- $k = -1$: c'est la symétrie de centre O.

L'homothétie conserve les **angles**, le parallélisme et l'alignement, mais pas les longueurs : elles sont multipliées par $|k|$. Une figure et son image ont la **même forme**.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/3e/homotheties-et-rotations/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits

Longueurs, aires, volumes

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2 ;
- les **volumes** sont multipliés par k^3.

Pourquoi ? Un carré de côté 1 agrandi de rapport 2 devient un carré de côté 2 : on peut y ranger $2 \times 2 = 4$ petits carrés. Un cube de côté 2 contient $2 \times 2 \times 2 = 8$ petits cubes.

Exemple guidé

Une maquette de voiture est au $\frac{1}{20}$. Le réservoir de la vraie voiture contient 50 L. Que contiendrait celui de la maquette ?

1. Rapport de réduction : $k = \frac{1}{20}$.

2. Volumes multipliés par $k^3 = \frac{1}{8\,000}$.

3. $50 \text{ L} \div 8\,000 = 0{,}006\,25$ L, soit environ 6 mL.

Retour au problème

1,5 m = 150 cm. Rapport : $k = \frac{150}{30} = 5$. Les longueurs sont multipliées par 5, l'aire par $5^2 = 25$. La lampe est le centre de l'homothétie.

La nacelle de grande roue subit une **rotation** de centre l'axe de la roue : elle reste à la même distance du centre, et son angle change avec le temps.

Les pièges

- Si les longueurs doublent, l'aire est multipliée par 4, pas par 2.
- Une rotation a toujours un sens : précise-le.
- Avec k négatif, l'image est de l'autre côté du centre, et la figure paraît retournée.

© Astrolab Cours · astrolabcours.fr/maths/3e/homotheties-et-rotations/ · Tous droits réservés : usage personnel uniquement, republication et usage commercial interdits